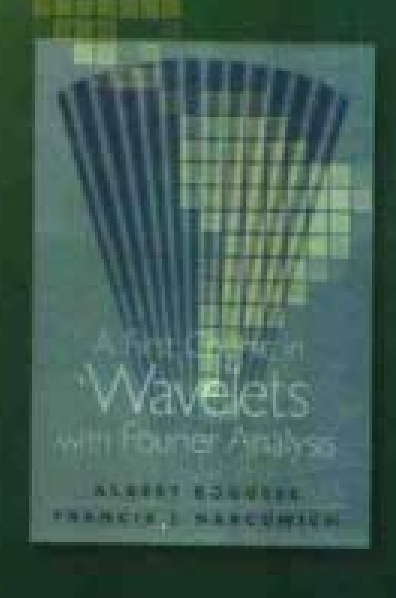
国外电子与通信教材系列

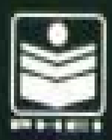
小波与傅里叶分析基础

A First Course in Wavelets with Fourier Analysis



[美] Albert Boggess
Francis J. Narcowich 著
芮国胜 康 健 等译





電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
http://www.phei.com.cn

小波与傅里叶分析基础

A First Course in Wavelets with Fourier Analysis

小波分析是当前数学中一个迅速发展的新领域，它同时具有理论深刻和应用十分广泛的双重意义。与傅里叶变换、窗口傅里叶变换相比，小波变换是一个时间和频率的局域变换，因而能有效地从信号中提取信息，通过伸缩和平移等运算功能对函数或信号进行多尺度细化分析，解决了傅里叶变换不能解决的许多困难问题，从而小波变换被誉为“数学显微镜”，它是调和分析发展史上里程碑式的进展。

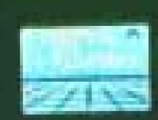
事实上小波分析的应用领域十分广泛，包括：数学领域的许多学科；信号分析、图像处理；量子力学、理论物理；军事电子对抗与武器的智能化；计算机分类与识别；音乐与语言的人工合成；医学成像与诊断；地震勘探数据处理；大型机械的故障诊断等方面。例如，在数学方面，它已用于数值分析、构造快速数值方法、曲线曲面构造、微分方程求解、控制论等；在信号分析方面，已用于信号的滤波、去噪声、压缩、传递等；在图像处理方面，已用于图像压缩、分类、识别、诊断与去污等；在医学成像方面，已用于减少B超、CT、核磁共振成像的时间，提高分辨率等。

本书的目的主要是向读者展示傅里叶分析和小波的许多基础知识以及在信号分析方面的应用。许多关于小波的文章和参考书籍均要求读者具有复杂的数学背景知识，本书则只要求学生具有较好的微积分和线性代数知识，通俗易懂，是数学、计算机、电子、通信、地质、医学、机械等专业高年级本科生及研究生的基础教科书，也可作为相关技术人员的参考书。

作者简介

Albert Boggess 和 **Francis J. Narcowich**：得克萨斯A & M大学教授，长期从事傅里叶分析及小波的教学与研究工作，本书源于作者的授课讲稿，其内容受到了学生的长期检验。









责任编辑：谭海平
特约编辑：王　崧
封面设计：毛惠庚



ISBN 7-5053-9544-0　　定价：28.00元

国外电子与通信教材系列

小波与傅里叶分析基础

A First Course in Wavelets with Fourier Analysis

[美] Albert Boggess
Francis J. Narcowich 著

芮国胜 康 健 等译

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京 • BEIJING

内容简介

本书的目的主要是向读者展示傅里叶分析和小波的许多基础知识以及在信号分析方面的应用。全书分为8章和2个附录，前言部分是学习第1章至第7章的准备知识，即内积空间；第1章讲解傅里叶系列的基础知识；第2章讲解傅里叶变换；第3章介绍离散傅里叶变换以及快速傅里叶变换；第4章至第7章讨论小波，重点在于正交小波的构建；附录部分则介绍稍微复杂的一些技术主题以及演示概念或产生图形的MATLAB代码。

小波分析的应用领域十分广泛，包括：数学领域的许多学科；信号分析、图像处理；量子力学、理论物理；军事电子对抗与武器的智能化；计算机分类与识别；音乐与语言的人工合成；医学成像与诊断；地质勘探数据处理；大型机械的故障诊断等方面。

许多关于小波的文章和参考书籍均要求读者具有复杂的数学背景知识，本书则只要求学生具有较好的微积分以及线性代数知识，通俗易懂，是数学、计算机、电子、通信、地质、医学、机械等专业高年级本科生及研究生的基础教科书，也可作为相关技术人员的参考书。

版权贸易合同登记号 图字：01-2003-4989

图书在版编目（CIP）数据

小波与傅里叶分析基础/（美）博格斯（Boggess, A.）著；芮国胜等译. –北京：电子工业出版社，2004.1
（国外电子与通信教材系列）
书名原文：A First Course in Wavelets with Fourier Analysis
ISBN 7-5053-9544-0

Ⅰ.小… Ⅱ.①博… ②芮… Ⅲ.①小波分析－教材 ②傅里叶分析－教材 Ⅳ.O17

中国版本图书馆CIP数据核字（2003）第123010号

责任编辑：谭海平　　特约编辑：王崧
印 刷 者：北京兴华印刷厂
出版发行：电子工业出版社
北京市海淀区万寿路173信箱　邮编：100036
经　　销：各地新华书店
开　　本：787×980　1/16　印张：17.5　字数：333千字
印　　次：2004年1月第1次印刷
定　　价：28.00元

凡购买电子工业出版社的图书，如有缺损问题，请向购买书店调换；若书店售缺，请与本社发行部联系。联系电话：（010）68279077。质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

序

2001年7月间，电子工业出版社的领导同志邀请各高校十几位通信领域方面的老师，商量引进国外教材问题。与会同志对出版社提出的计划十分赞同，大家认为，这对我国通信事业、特别是对高等院校通信学科的教学工作会很有好处。

教材建设是高校教学建设的主要内容之一。编写、出版一本好的教材，意味着开设了一门好的课程，甚至可能预示着一个崭新学科的诞生。20世纪40年代MIT林肯实验室出版的一套28本雷达丛书，对近代电子学科、特别是对雷达技术的推动作用，就是一个很好的例子。

我国领导部门对教材建设一直非常重视。20世纪80年代，在原教委教材编审委员会的领导下，汇集了高等院校几百位富有教学经验的专家，编写、出版了一大批教材；很多院校还根据学校的特点和需要，陆续编写了大量的讲义和参考书。这些教材对高校的教学工作发挥了极好的作用。近年来，随着教学改革不断深入和科学技术的飞速进步，有的教材内容已比较陈旧、落后，难以适应教学的要求，特别是在电子学和通信技术发展神速、可以讲是日新月异的今天，如何适应这种情况，更是一个必须认真考虑的问题。解决这个问题，除了依靠高校的老师和专家撰写新的符合要求的教科书外，引进和出版一些国外优秀电子与通信教材，尤其是有选择地引进一批英文原版教材，是会有好处的。

一年多来，电子工业出版社为此做了很多工作。他们成立了一个"国外电子与通信教材系列"项目组，选派了富有经验的业务骨干负责有关工作，收集了230余种通信教材和参考书的详细资料，调来了100余种原版教材样书，依靠由20余位专家组成的出版委员会，从中精选了40多种，内容丰富，覆盖了电路理论与应用、信号与系统、数字信号处理、微电子、通信系统、电磁场与微波等方面，既可作为通信专业本科生和研究生的教学用书，也可作为有关专业人员的参考材料。此外，这批教材，有的翻译为中文，还有部分教材直接影印出版，以供教师用英语直接授课。希望这些教材的引进和出版对高校通信教学和教材改革能起一定作用。

在这里，我还要感谢参加工作的各位教授、专家、老师与参加翻译、编辑和出版的同志们。各位专家认真负责、严谨细致、不辞辛劳、不怕琐碎和精益求精的态度，充分体现了中国教育工作者和出版工作者的良好美德。

随着我国经济建设的发展和科学技术的不断进步，对高校教学工作会不断提出新的要求和希望。我想，无论如何，要做好引进国外教材的工作，一定要联系我国的实际。教材和学术专著不同，既要注意科学性、学术性，也要重视可读性，要深入浅出，便于读者自学；引进的教材要适应高校教学改革的需要，针对目前一些教材内容较为陈旧的问题，有目的地引进一些先进的和正在发展中的交叉学科的参考书；要与国内出版的教材相配套，安排好出版英文原版教材和翻译教材的比例。我们努力使这套教材能尽量满足上述要求，希望它们能放在学生们的课桌上，发挥一定的作用。

最后，预祝"国外电子与通信教材系列"项目取得成功，为我国电子与通信教学和通信产业的发展培土施肥。也恳切希望读者能对这些书籍的不足之处、特别是翻译中存在的问题，提出意见和建议，以便再版时更正。

吴佑寿

中国工程院院士、清华大学教授

"国外电子与通信教材系列"出版委员会主任

出 版 说 明

进入21世纪以来，我国信息产业在生产和科研方面都大大加快了发展速度，并已成为国民经济发展的支柱产业之一。但是，与世界上其他信息产业发达的国家相比，我国在技术开发、教育培训等方面都还存在着较大的差距。特别是在加入WTO后的今天，我国信息产业面临着国外竞争对手的严峻挑战。

作为我国信息产业的专业科技出版社，我们始终关注着全球电子信息技术的发展方向，始终把引进国外优秀电子与通信信息技术教材和专业书籍放在我们工作的重要位置上。在2000年至2001年间，我社先后从世界著名出版公司引进出版了40余种教材，形成了一套“国外计算机科学教材系列”，在全国高校以及科研部门中受到了欢迎和好评，得到了计算机领域的广大教师与科研工作者的充分肯定。

引进和出版一些国外优秀电子与通信教材，尤其是有选择地引进一批英文原版教材，将有助于我国信息产业培养具有国际竞争能力的技术人才，也将有助于我国国内在电子与通信教学工作中掌握和跟踪国际发展水平。根据国内信息产业的现状、教育部《关于“十五”期间普通高等教育教材建设与改革的意见》的指示精神以及高等院校老师们反映的各种意见，我们决定引进“国外电子与通信教材系列”，并随后开展了大量准备工作。此次引进的国外电子与通信教材均来自国际著名出版商，其中影印教材约占一半。教材内容涉及的学科方向包括电路理论与应用、信号与系统、数字信号处理、微电子、通信系统、电磁场与微波等，其中既有本科专业课程教材，也有研究生课程教材，以适应不同院系、不同专业、不同层次的师生对教材的需求，广大师生可自由选择和自由组合使用。我们还将与国外出版商一起，陆续推出一些教材的教学支持资料，为授课教师提供帮助。

此外，“国外电子与通信教材系列”的引进和出版工作得到了教育部高等教育司的大力支持和帮助，其中的部分引进教材已通过“教育部高等学校电子信息科学与工程类专业教学指导委员会”的审核，并得到教育部高等教育司的批准，纳入了“教育部高等教育司推荐——国外优秀信息科学与技术系列教学用书”。

为做好该系列教材的翻译工作，我们聘请了清华大学、北京大学、北京邮电大学、东南大学、西安交通大学、天津大学、西安电子科技大学、电子科技大学等著名高校的教授和骨干教师参与教材的翻译和审校工作。许多教授在国内电子与通信专业领域享有较高的声望，具有丰富的教学经验，他们的渊博学识从根本上保证了教材的翻译质量和专业学术方面的严格与准确。我们在此对他们的辛勤工作与贡献表示衷心的感谢。此外，对于编辑的选择，我们达到了专业对口；对于从英文原书中发现的错误，我们通过与作者联络、从网上下载勘误表等方式，逐一进行了修订；同时，我们对审校、排版、印制质量进行了严格把关。

今后，我们将进一步加强同各高校教师的密切关系，努力引进更多的国外优秀教材和教学参考书，为我国电子与通信教材达到世界先进水平而努力。由于我们对国内外电子与通信教育的发展仍存在一些认识上的不足，在选题、翻译、出版等方面的工作中还有许多需要改进的地方，恳请广大师生和读者提出批评及建议。

电子工业出版社

教材出版委员会

译者序

本书的特色十分鲜明：它是一本工科高年级本科生或研究生能看得懂的书。译者从 1998 年开始给通信与信息系统等专业研究生开设“小波变换及其应用”课程，候选的国内外教材先后不下十余本，均存在同一个问题：这些小波书籍太数学化了，需要实变函数论等知识才能阅读，而一般工科学生并不具备，因此学起来往往有畏惧的情绪。同时，小波理论又在许多工程领域取得了丰硕的成果，令广大工程技术人员们不得不跃跃欲试。本书作者 Albert Boggess 博士现任得克萨斯 A&M 大学数学系主任、教授，多年来一直从事傅里叶分析和小波理论的教学工作，其丰富的教学经验和成果完全地展示在本书中，能遇到这样的书籍实属难得。

本书可明显地分为两个部分：第 1 章至第 3 章探讨傅里叶分析，第 4 章至第 7 章探讨小波分析。前者存在的原因有二，一是在小波分析中要经常引用傅里叶分析的有关内容，二是本书的傅里叶分析部分不仅基本理论介绍得很清楚，而且还有大量引人入胜的背景材料，这在国内常见的书籍中是少见的。

译者 2002 年 9 月见到此书的英文版，阅后感觉甚好，马上在当年的教学中采用，学生一致反映不错，这当是意料之中的事。授课结束，手头也有了厚厚一摞翻译稿，于是就有了把它变成铅字出版的念头。幸得电子工业出版社的大力支持，得以现在的面目呈现给各位读者。原书只有少量的错误，已在译文中改正并指出。

“小波”这个名词早已有之，但一直在纯数学的王国里游荡了近一个世纪，有些艰深晦涩的气息在所难免。可明显看出，本书的作者在字里行间处处想消除这种气息，而且最终也确实做到了。若作为纯粹的小波理论研究之用，本书显然有些浅显，建议另谋它书；若作为小波理论的应用，结合相应的工程背景，本书是够用的。况且，时至今日，小波理论在许多工程领域的应用已有了相应的“定式”，若教师在给工科学生讲授小波理论过程中，能结合具体的应用，定会给学习过程带来无穷乐趣，同时也增强了学习的信心。

译者不是数学专业出身，初涉小波“高贵”的殿堂，纯粹是为了某工程项目以及后来教学工作的需要。若有任何错误，敬请读者包涵并指正。

全书由芮国胜、康健翻译。感谢 2001 级和 2002 级研究生中参加听课的所有同学，特别是硕士生邱风、高学强和博士生王晓东还具体参与了部分文稿的录入和校对工作。数学教研室主任时宝教授最后敲定了一些术语的译法，康锡章教授通览了全书并提出了许多好的建议，在此一并对他们表示衷心的感谢。

前　言

傅里叶级数与傅里叶变换的内容自 19 世纪以来已经非常丰富了，关于此论题已发表和出版了大量的研究论文和书籍（大学程度和研究生程度）。相比而言，小波的出现却是近几年的事。尽管可追溯到几十年前，但只是在最近的二十年里，小波才成为信号分析和其他应用领域中非常流行的工具。在一定程度上，这应当归功于 Ingrid Daubechies 女士[①]在构造紧支撑正交小波方面的杰出工作。因此，大多数关于小波的文章和参考资料均需要复杂的数学背景（研究生程度的实分析课程）。本书的目的是给理科、工科和数学专业高年级本科生呈现关于傅里叶分析和小波的基础知识及其在信号分析中的应用。先修课程要求是微积分和部分线性代数知识（只要涵盖矩阵、矢量空间、线性相关、线性映射和内积空间即可）。在信号处理的应用方面只是最基本的，没有大量应用该领域的专业技术术语，以便使更广泛的读者群能够接受和领悟。

傅里叶分析

展开成傅里叶级数的基本目的是要把一个信号（时间变量 t 的函数）分解为不同的频率分量。这些基本的构造块是正弦函数和余弦函数：

$$\sin(nt) \qquad \cos(nt)$$

其振荡频率为$2n\pi$。例如，考察下面的函数：

$$f(t) = \sin(t) + 2\cos(3t) + 0.3\sin(50t)$$

该函数有三个分量，其振荡频率分别为 1[$\sin t$ 部分]、3[$2\cos(3t)$ 部分]和 50[$0.3\sin(50t)$ 部分]。f 如图 1 所示。

信号分析中要解决的一个常见的问题是：滤除噪声。例如，播放录音磁带时所特有的嘶嘶背景声就是一个高频（声音）噪声，有多种设备（如杜比滤波器等）可以部分滤除它。在前述的例子中，$0.3\sin(50t)$ 这部分造成了图 1 中 f 曲线的抖动。令系数 0.3 等于 0，得到函数：

---

① Ingrid Daubechies 女士现为普林斯顿大学数学系教授——译者注。

$$\tilde{f}(t) = \sin(t) + 2\cos(3t)$$

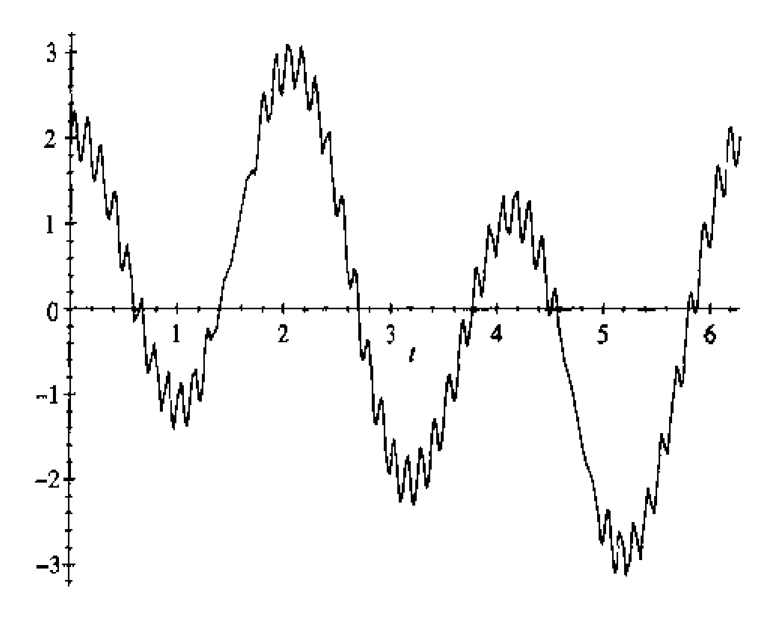


图 1　$f(t) = \sin(t) + 2\cos(3t) - 0.3\sin(50t)$

其图形（如图 2 所示）除了没有高频抖动以外，同 f 的图形几乎一样。

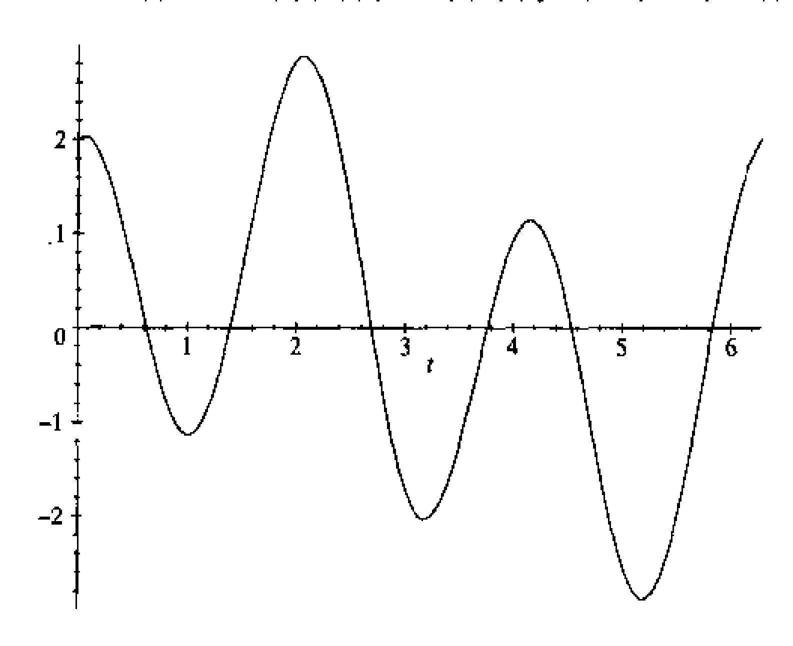


图 2　$f(t) = \sin(t) + 2\cos(3t)$

这个例子显示了一个滤除噪声的方法，该方法就是把信号$f(t)$用正弦和余弦信号展开：

$$f(t) = \sum_n a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$$

然后忽略掉（即令其等于 0）与滤除频率相应的系数（a_n和b_n）。对本例中的这个信

号 f，因为它已经表示成了正弦和余弦信号的和的形式，所以处理过程很容易。然而，大多数信号不是以这种方式表示的。研究傅里叶级数的目的之一，就是要研究如何有效地把一个函数分解成正弦和余弦分量之和，以便接着可以实现各种滤波算法。

信号分析中另一个相关的问题是数据压缩。图 1 中的信号 $f(t)$ 表示了一个电话线路中的信号。横轴代表时间，单位是毫秒，纵轴表示某人讲话时产生的声压值。假设该信号被数字化后通过海事卫星从美国传输到欧洲。一个直观而简单的方法是每 1 毫秒左右取样一次该信号，然后横跨大西洋把得到的这些数据从美国传输到欧洲。然而，对于这样一小段的谈话就需要每秒几千比特的数据传输率。因为两洲之间的电话交谈实在太多了，电话公司就要在不明显损伤原信号的基础上，尽可能地压缩信号。一个有效的方法是，把该信号表示成它的傅里叶级数：$f(t)=\sum_n a_n\cos(nt)+b_n\sin(nt)$，然后在某个给定的错误容限下，把小于相应阈值的系数 a_n 和 b_n 舍弃掉。仅仅那些大于阈值的系数[1]需要传送到大西洋彼岸，然后在那里重构。对于大多数信号，其傅里叶级数中显著系数的数目相对较少。

小波

傅里叶级数的一个缺点是，它的构造块是无始无终的周期性正弦波和余弦波。该方法适合滤除或压缩那些具有近似周期性的波动信号（如图 1 所示），而对那些具有显著局部特性的信号，正弦波和余弦波就无能为力了。例如，考虑图 3 中的信号，它表示一段声音信号，其中有两个噪声尖峰需要滤除。因为这两个尖峰是孤立的，正弦波和余弦波无法很好地模拟该信号。幸好还有另外一类构造块，称为小波，它适合模拟此类信号。粗略地看，小波就像仅持续了一两个周期的波动，仅仅在非常有限的一段区间有非零值，而不是像正弦波和余弦波那样无始无终[图 4 所示的是 Daubechies($N=2$)小波]。小波可以沿时间轴前后平移，也可按比例伸展和压缩以获取低频和高频小波（见图 5）。构造好的小波函数可以像傅里叶级数那样用于滤波或压缩信号。基本方法是：给定一信号，首先把它展开成小波的平移和伸缩之和，然后把欲舍弃项的系数去掉或进行适当修改。

为了实现把一个信号进行分解展开的有效算法（傅里叶或基于小波的算法），构造块（正弦、余弦或小波）应当满足一些基本性质，其中之一就是正交性，对正弦函数就是：

---

① 称为显著系数——译者注。

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin(nt)\sin(mt)\,dt=\begin{cases}0 & \text{若 } n\neq m\\ 1 & \text{若 } n=m\end{cases}$$

余弦函数也满足类似性质。此外，对所有的 n 和 m，有 $\int_0^{2\pi}\sin(nt)\cos(mt)\,dt=0$。后面我们将看到，正交性导致产生了求解傅里叶系数（a_n 和 b_n）的简单公式和高效算法（FFT，快速傅里叶变换）。

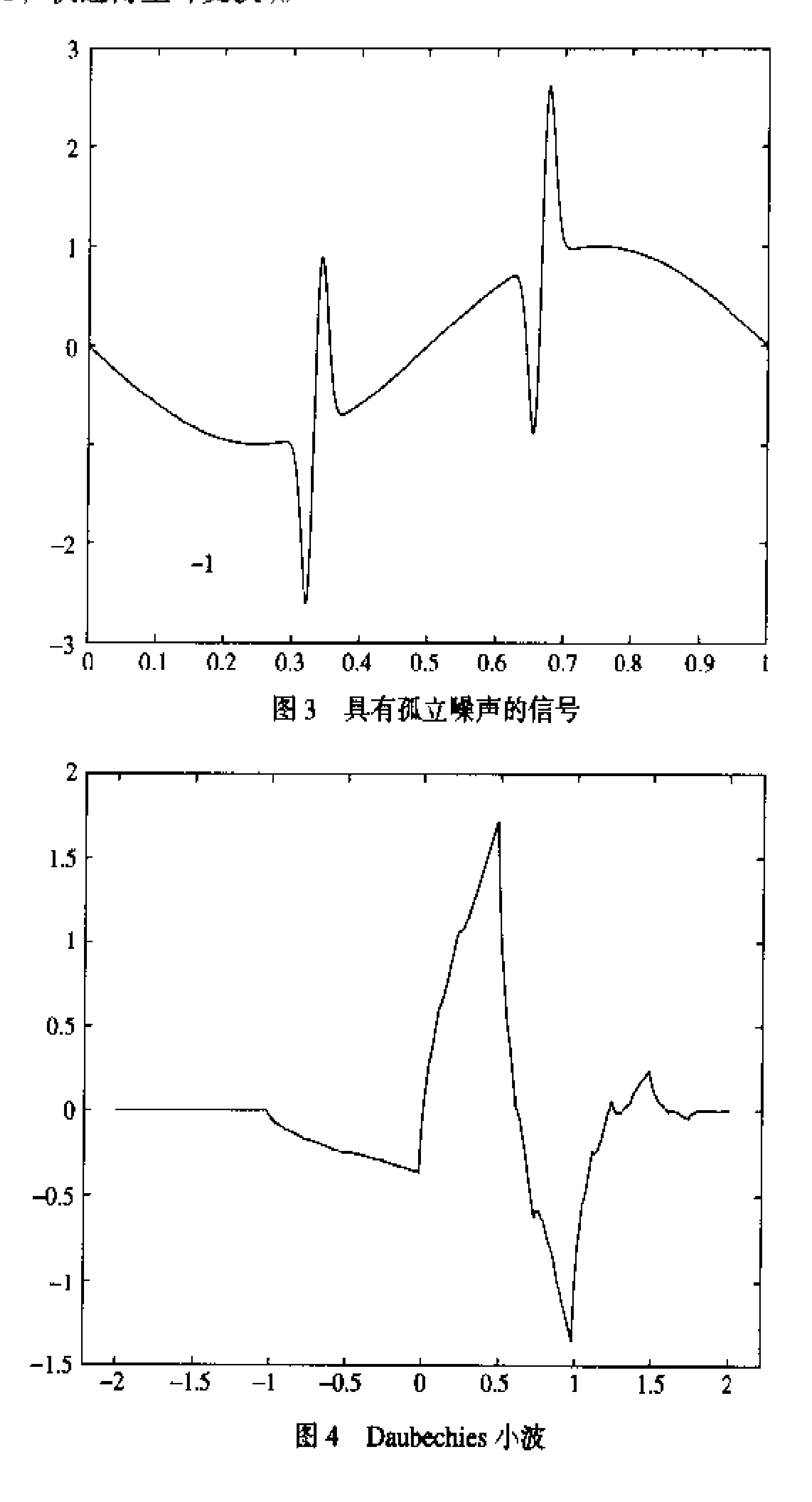


图 3　具有孤立噪声的信号

图 4　Daubechies 小波

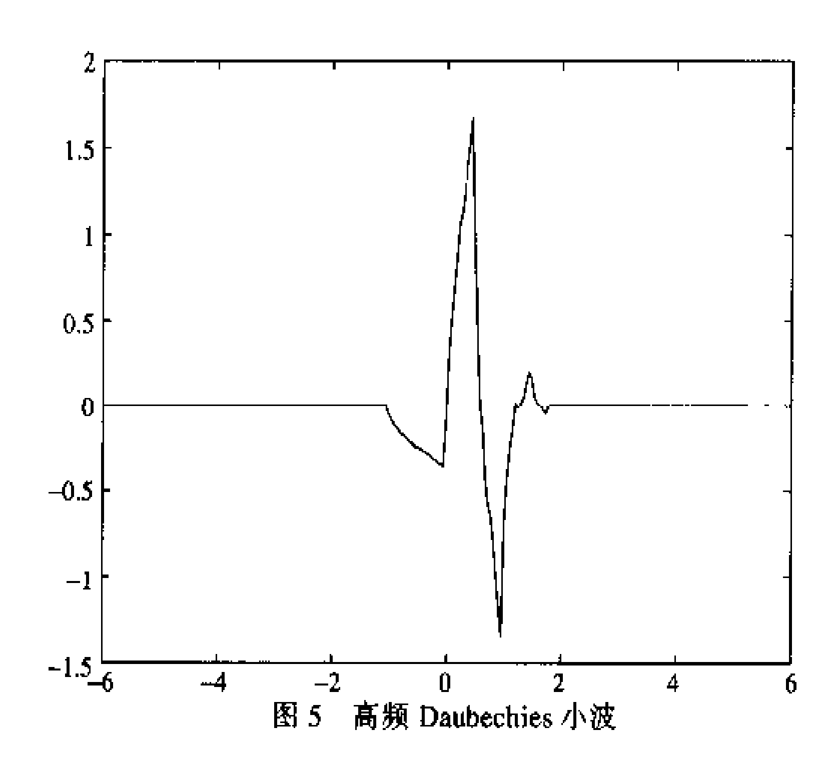


图 5　高频 Daubechies 小波

但在构造小波时却碰到困难：如何保证平移和伸缩后的小波仍然满足正交性？如何得到计算小波系数的高效算法？这是不能通过简单地截断正弦波或余弦波而仅保留一两个周期来得到小波的原因。经过如此截断得到的函数，确实满足小波的正交性，但其平移和伸缩系不再满足正交性，所以在信号分析中无法采用。

本书概览

本书包含 8 章正文和 2 个附录。第 0 章是关于内积空间的，包括阅读第 1 章至第 7 章时的先修知识。我们感兴趣的最基本的内积空间是平方可积内积空间，这里没有应用 Lebesgue 积分，而是用一个简化的方式把它引出。根据读者的熟悉情况，本章既可作为引言性质的单独的一章，也可把其内容揉进后续章节中。第 1 章包括傅里叶级数的基本知识。为了证明的方便，在对前提条件适当简化后，提出了几个收敛定理。第 2 章是傅里叶变换。除了为其自身内容完整以外，本章的大部分笔墨是为后续的几个小波章节准备的。其中的傅里叶逆变换的证明不太正规，这主要是为了照顾大多数读者。严格的证明在附录 A 中给出。离散傅里叶变换和快速傅里叶变换在第 3 章讨论。该章还包括在信号分析中的应用和对建筑物振动频率辨识方面的应用。

小波部分在第 4 章至第 7 章中讨论。首先从第 4 章的 Haar 小波开始。用定义明晰的 Haar 小波可以较容易地讲述多分辨率分析的基本概念以及与小波相关的诸如正交性等的基本性质。然而，Haar 小波是不连续的，从而限制了它在信号分析中的应用。多分辨率分析的一般概念在第 5 章给出。第 4 章的多分辨率分析只是针对 Haar 小波的。第 6 章包括既连续又正交的 Daubechies 小波的构造，同时给出了光滑小波

的定义。第 7 章是更深入的专题，包括多维小波和小波变换等。

本书中大多数定理的证明均在正文中直接给出，其中一些较复杂的定理是用启发式的方法进行证明的．而严谨完整的证明过程可见附录 A。附录 A 中的有些证明，需要诸如 Lebesgue 积分这样艰深的数学知识。

书中一些插图的曲线是用附录 B 的 MATLAB 程序产生的，这些程序也有助于读者更好地理解基本概念。

本书并不是一篇论文，其后半部分关注的焦点只是正交小波的构造，极少提及用样条和其他工具构造的双正交小波。这是因为关于此类小波有大量文献可以参阅（如参考文献[5]），也是因为我们想让具有大学高年级以上知识程度的读者能够读懂本书。

大学本科生可用一学期的时间学习本书。

致　谢

本书源自两位作者在得克萨斯 A&M 大学讲授傅里叶分析和小波课程时的讲义。作者要感谢所有参加听课的学生们对原稿提出的中肯建议，特别是 Svenja Lowitzsch 和 Beng Ong 仔细地阅读了原稿并改正了其中的许多错误。还要感谢编辑部的全体人员，特别是 George Lobell 在成书过程中对作者的鼓励。下列人员在提出建议和为本书改正错误方面做出了杰出的工作，他们是：得克萨斯大学的 William Beckner，新墨西哥州立大学的 Joe Lakey，罗彻斯特工业学院的 Edward A. Newburg，康奈尔大学的 Oscar Rothaus，得克萨斯工业大学的 David Weinberg。当然，书中若有任何错误理当归咎于作者本人。我们还要感谢 Steven S. Pawlowski 以及 Prentice Hall 出版公司的其他人员，正是他们极其专业的工作使得本书得以顺利出版。作者 Fran Narcowich 还要单独感谢他的妻子 Linda 所给予的支持和鼓励。

Albert Boggess
Al.Boggess@math.tamu.edu
Francis J. Narcowich
fnarc@math.tamu.edu

目　录

第0章　内积空间

0.1　引言

对于R^3上的两个矢量$X = (x_1, x_2, x_3)$和$Y = (y_1, y_2, y_3)$，其标准（Euclidean）内积定义为：

$$\langle X, Y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

这样定义的原因部分是因为度量矢量长度的需要，即由 Pythagorean 定理有：

$$X \text{ 的长度} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \sqrt{\langle X, X \rangle}$$

本章的目的是在更一般的集合上定义内积的概念，该集合包含相当宽泛的矢量空间。我们尤其感兴趣其元素是信号（即时间的函数）的矢量空间上的内积。

0.2　内积的定义

由R^3空间上内积的定义可自然推广到n维任意的R^n空间上的内积。对于R^n上两个矢量$X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$和$Y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$，Euclidean 内积为：

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$$

在研究傅里叶级数时，将大量使用复指数概念，因此我们在研究实矢量空间时还要详细讨论一下复矢量空间。沿用实矢量空间中对内积的定义，只要对第二项取共轭即可得到C^n上的内积定义。复数$z = x + iy$的共轭记为$\overline{z} = x - iy$。把$z\overline{z} = x^2 + y^2$定义为$|z|^2$[平面上由点$(0,0)$至点$(x,y)$而形成的矢量$z = x + iy$的长度的平方]。

若$Z = (z_1, z_2, \cdots, z_n)$, $W = (w_1, w_2, \cdots, w_n)$为$C^n$上的两个矢量，那么有：

$$\langle Z, W \rangle = \sum_{j=1}^{n} z_j \overline{w_j}$$

共轭的目的是保证C^n上的矢量长度是实的且为非负：

$$Z\text{ 的长度} = \sqrt{\langle Z,Z\rangle} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} z_j\overline{z_j}} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}|z_j|^2}$$

前面定义的内积具有一些共同的性质。例如，内积的双线性性质，即：

$$\langle X+Y,Z\rangle = \langle X,Z\rangle + \langle Y,Z\rangle \text{ 和 } \langle X,Y+Z\rangle = \langle X,Y\rangle + \langle X,Z\rangle$$

满足前面内积定义的其他一些内积的性质，今后将作为公理使用。有关 R^n和 C^n上内积的这些公理的验证将作为本章的习题。

定义 0.1 一个在复矢量空间 V 上的内积是一个函数$\langle\cdot,\cdot\rangle : V\times V\to C$，它满足以下性质。

（1）正性：$\langle v,v\rangle > 0$，对任意非零的 $v\in V$。

（2）共轭对称性：$\overline{\langle v,w\rangle} = \langle w,v\rangle$，对所有的$v,w\in V$。

（3）均匀性：$\langle cv,w\rangle = c\langle v,w\rangle$，对所有的$v,w\in V$，且比例因子$c\in C$。

（4）加性：$\langle u+v,w\rangle = \langle u,w\rangle + \langle v,w\rangle$，对所有的$u$，$v$，$w\in V$。

定义了内积的矢量空间称为内积空间。为了强调基本空间 V，有时把 V上的内积表示为：

$$\langle\ ,\ \rangle_V$$

只要作少许调整，上述定义同样适用于实内积空间。这些调整包括：均匀性中的比例因子 c 是实的，共轭对称性中没有共轭运算。注意性质（2）、（4）隐含着第二条双线性性质：$\langle u,v+w\rangle = \langle u,v\rangle + \langle u,w\rangle$。性质（2）、（3）意味着比例因子经过共轭，可以从内积的第二项中取出来：

$$\langle v,cw\rangle = \overline{\langle cw,v\rangle} = \overline{c}\overline{\langle w,v\rangle} = \overline{c}\langle v,w\rangle$$

正性意味着可定义一个非零数$\|v\| = \sqrt{\langle v,v\rangle}$，作为矢量 v的长度或称之为范数。长度定义意味着矢量空间 V 中两个矢量的距离为：

$$\{v,w\}\text{ 之间的距离} = \|v-w\|$$

注意内积的正性还意味着当$\|v-w\| = 0$时，只有$v = w$。距离概念还导出序列$\{v_k;\ k=1,2,\cdots\}$收敛的意义，即：

$$v_k\to v\text{，如果 }\|v_k - v\|\to 0$$

换句话说，如果v_k和 v的距离随着 k 的变大而越来越小，那么$v_k\to v$。

以下是一些关于内积的进一步的例子：

例 0.2

令 V 是多项式空间$p = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$，$a_j \in C$。给出 V 中内积：如果$p = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$和 $q = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n$，那么：

$$\langle p, q \rangle = \sum_{j=0}^{n} a_j \overline{b_j}$$

注意这个内积空间非常类似C^{n+1}，即对$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$用一个点$(a_0, \cdots, a_n) \in C^{n+1}$来表示。

例 0.3

不同的内积可由同一个矢量空间导出，本例定义了一个 C^2上的非标准 Euclidean 内积。设 $v = (v_1, v_2)$，$w = (w_1, w_2) \in C^2$，定义：

$$\langle v, w \rangle = (\overline{w_1}, \overline{w_2}) \begin{pmatrix} 2 & -i \\ i & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \text{（普通的矩阵乘）}$$

这里对矩阵的选择没有特殊要求，可用 A 取代上式中的矩阵，只要 A 是 Hermitian 对称的（即$\overline{A}^T = A$）且正定（即所有特征值为正）。这些条件意味着 A 可逆。证明留待习题中。

0.3　L^2空间和 l^2空间

0.3.1　定义

上节中的例子均针对有限维空间（即仅包含有限个线性独立矢量的空间）。本节将讨论一类无限维矢量空间，这对分析信号特别有用。一个信号（如声音信号）可看做是一个函数 $f(t)$，它表示了 t 时刻的信号密度。这里的 t 在区间$a \leqslant t \leqslant b$变化，表示信号持续时间。但 a 可能为$-\infty$，b 可能为$+\infty$。

下面给出一个更严格的定义：

定义 0.4　对于$a \leqslant t \leqslant b$，空间$L^2([a, b])$表示所有平方可积函数组成的空间，即：

$$L^2([a, b]) = \left\{ f : [a, b] \to C;\ \int_a^b |f(t)|^2 \, dt < \infty \right\}$$

该空间也包含那些不连续的函数。本书中讨论的例子均是连续的或者有有限个间断点。在这个意义上，相应的积分可看做是基本的 Riemann 积分（在大学一年级微积分课程中介绍）。而实际上 L^2的定义可以有无穷个间断点，此时必须用 Lebesgue

积分。条件$\int_a^b |f(t)|^2\,dt < \infty$从物理意义上解释为信号的总能量是有限的（大部分信号均满足）。

空间$L^2[a,b]$是无限维的。例如，若$a=0$，$b=1$，函数列$\{1,\ t,\ t^2,\ t^3\ldots\}$是线性独立的且属于$L^2[0,1]$。但$f(t)=1/t$不属于$L^2[0,1]$，因为$\int_0^1 (1/t)^2\,dt=\infty$。

L^2内积。下面我们把注意力转入定义于$L^2[a,b]$上合适的内积。为了弄清楚L^2内积的背景，我们把$[a,b]$离散化。不妨令$a=0$，$b=1$，N是一个足够大的正整数。令$t_j=j/N$，$1\leqslant j\leqslant N$。若f是连续的，那么f在区间$[t_j,t_{j+1})$的值可由$f(t_j)$近似。因此，f可由下面的矢量来近似：

$$f_N=(f(t_1),f(t_2),\cdots,f(t_N))\in R^N$$

如图 0.1 所示。随着N变大，f_N近似f的程度越来越好。

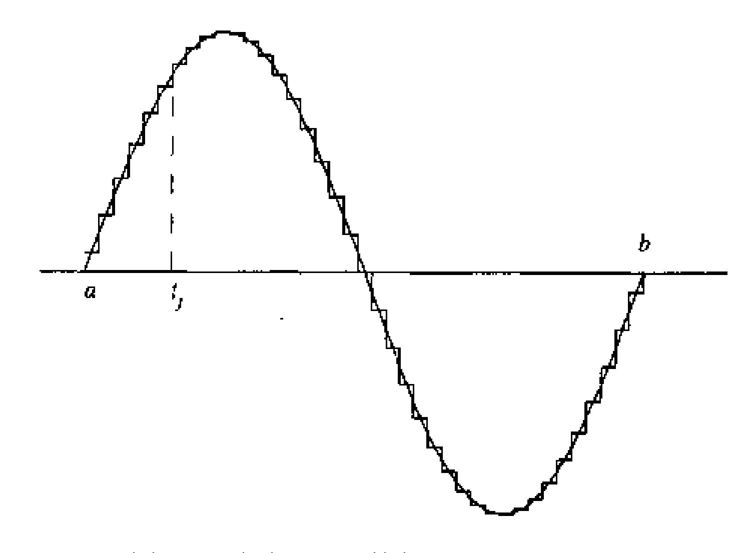


图 0.1 连续函数由其离散化形式来近似

假如f和g是两个$L^2[0,1]$中的信号，那么它们可分别被离散化为f_N和g_N。$\langle f,g\rangle_{L^2}$的一个可能的定义是随着N的增加，检验R^N上的f_N和g_N的普通内积：

$$\langle f_N,g_N\rangle_{R^N}=\sum_{j=1}^{N} f(t_j)\overline{g(t_j)}=\sum_{j=1}^{N} f(j/N)\overline{g(j/N)}$$

该方法的不足是，随着N变大，上式右边的和显然增大。更好的方法是求其平均，即：

$$\frac{1}{N}\langle f_N,g_N\rangle_{R^N}=\sum_{j=1}^{N} f(j/N)\overline{g(j/N)}\,\frac{1}{N}$$

因为f_N和g_N随着N增大分别趋近于f和g，那么$\langle f,g\rangle_{L^2}$的一个合理定义是，随着$N\to\infty$，取该平均内积的极限。

上式可写为：

$$\frac{1}{N}\langle f_N, g_N\rangle_{R^N} = \sum_{j=1}^{N} f(t_j)\overline{g(t_j)}\,\Delta t,\ \text{这里}\ \Delta t = 1/N$$

上式右边的和是一个在区间$[0,1]$的分划$[0,t_1,t_2,\cdots,t_N=1]$下，对$\int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,dt$的 Riemann 和近似。该近似随 N 增大而变得越来越好，所以有理由定义$L^2[0,1]$上的内积为$\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,dt$。由此给出了下面定义的基础。

定义 0.5　$L^2([a,b])$上的L^2内积定义为：

$$\langle f,g\rangle_{L^2} = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}\,dt,\ \ f,\,g\in L^2([a,b])$$

共轭对称、一致性和双线性对该内积同样成立，证明留待习题中。

对于正性条件，若$0=\langle f,f\rangle=\int_a^b |f(t)|^2\,dt$且 f 是连续的，那么对所有的t，有$f(t)=0$。若允许$f(t)$有有限个间断点，那么可以肯定，除有限个点外，$f(t)=0$。例如，函数：

$$f(t)=\begin{cases}1, 若\ t=0\\ 0, 其他\end{cases}$$

是非零函数，但$\int_{-1}^{1}|f(t)|^2\,dt = 0$。我们规定，若除有限个点外（或更一般地，用 Lebesgue 积分观点，除了测度为零的集合外），$f(t) = g(t)$，则 f 和g在$L^2([a,b])$上是相等的。因为对这类函数，$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b g(t)\,dt$成立，所以上述定义对积分是有利的。正是由于此规定，内积的正性成立。

依信号分析的观点，上述相等的定义是合理的。一个信号在某个孤立点时刻（例如，$t=0$时）的特性几乎没有什么价值，而在一个时间段内的性质则很重要。虽然测度论和 Lebesgue 积分在本书中不用，但我们这里还是离题讨论了相等的概念，并且用了一段足够多的篇幅。集测度概念是区间长度概念的泛化。区间$a<t<b$的测度是$b-a$。一个不连续区间的测度是构成该区间的各连续区间段长度之和。所以有限点集（或可列）的测度为0。不相邻区间的测度是各个区间长度之和。一个更复杂的几何测度的确定，可先把它分隔成有限个不相连单元。因为长度为 0 的积分区域对积分整体上没有影响，所以我们有理由认为：若一个函数$f(t)$在$a\leqslant t\leqslant b$上除测度为 0 的集合外，$f(t)=0$，那么$\int_a^b f(t)\,dt=0$。反之亦成立。如：

$$0=\|f\|_{L^2[a,b]}^2=\int_a^b f(t)^2\,dt$$

那么，除了零测度集外，$f(t)=0$，$a \leqslant t \leqslant b$。基于上述原因，若声明两个函数 f 和 g 相等，意味着在 $[a,b]$ 上除了零测度集外有 $f(t)=g(t)$。这个关于相等的更一般的定义已涵盖了上一段中有关的定义（即，若除有限个点外，两个函数的值相同，则这两个函数相等）。

l^2 空间。在许多应用场合，进行处理前信号已经离散化了。例如CD播放出的音乐由一系列在固定间隔时间里的声强表示。此时，用一序列 $X=\cdots,x_{-1},x_0,x_1,\cdots$ 表示，其中 x_j 是信号在第 j 个时间段 $[t_j,t_{j+1}]$ 内的数值。理论上，上述序列可以是无限的（$j\to\infty$ 或 $j\to-\infty$，或者两端无限）。但实际上，信号通常终止于某个 N，即当 $|j|>N$ 时，$x_j=0$。

以下定义描述了 L^2 的一个离散形式。

定义 0.6 l^2 空间是由所有序列 $X=\cdots,x_{-1},x_0,x_1,\cdots$，$x_i\in C$ 且 $\sum_{-\infty}^{\infty}|x_n|^2<\infty$ 构成的。该空间中的内积定义为：

$$\langle X,Y\rangle_{l^2}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_n\overline{y_n}$$

这里 $X=\cdots,x_{-1},x_0,x_1,\cdots$，$Y=\cdots,y_{-1},y_0,y_1,\cdots$。

验证 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是 l^2 的一个内积很容易，留待习题中。

相对误差。对于两个信号 f 和 g，其差的 L^2 范数 $\|f-g\|_{L^2}$ 提供了一个 f 与 g 差别的度量。然而，通常相对误差更有意义：

$$\text{相对误差}=\frac{\|f-g\|_{L^2}}{\|f\|_{L^2}}$$

（分母也可以是 $\|g\|_{L^2}$）。相对误差度量了 f 和 g 之差的范数相对 $\|f\|_{L^2}$ 的大小。对于离散信号应采用 l^2 范数。

0.3.2 L^2 收敛与一致收敛

如 0.2 节中定义的，一矢量序列 $\{v_n;\ n=1,2,\cdots\}$ 在内积空间 V 中称为收敛到矢量 $v\in V$ 是指，随 N 增大，v_n 接近 v。这里接近的意思是 $\|v_n-v\|$ 很小，用精确的数学语言表达就是，若 $\|v_n-v\|\to 0$，$n\to\infty$，则 v_n 收敛于 v。

在本书中，我们会经常谈到内积空间 $L^2[a,b]$，因此有必要详细讨论一下该空间的收敛问题。

定义 0.7 在 $L^2[a,b]$ 上序列 f_n 收敛于 f，若 $\|f_n-f\|_{L^2}\to 0$，$n\to\infty$。更精确地，给定 $\epsilon>0$，存在一个非负整数 N，使得当 $n\geqslant N$ 时，有 $\|f-f_n\|_{L^2}<\epsilon$。

在L^2中收敛有时又称为均匀收敛。针对函数类还有两种不同类型的收敛。

定义 0.8

1. 序列f_n在$a \leqslant t \leqslant b$上逐点收敛到$f$是指对每个$t \in [a,b]$和每个小的抖动$\epsilon > 0$，有一个正整数$N$，使得当$n \geqslant N$时，有$|f_n(t) - f(t)| < \epsilon$。
2. 序列f_n在$a \leqslant t \leqslant b$一致收敛到$f$是指对每个小的$\epsilon > 0$，有一个正整数$N$，使得当$n \geqslant N$时，对所有的$a \leqslant t \leqslant b$，有$|f_n(t) - f(t)| < \epsilon$。

对于一致收敛，N仅取决于ϵ的大小，而与点t无关，而逐点收敛中，N还要依赖于点t。

下面比较一下这三种收敛。若在$[a,b]$上f_n一致收敛到f，那么f_n的值在整个区间$[a,b]$上接近f的值。例如，图 0.2 表示了两个函数互相一致地接近。不同的是，若f_n逐点收敛到f，那么对每个固定的t，当n很大时，$f_n(t)$才接近于$f(t)$。然而f_n接近$f(t)$的速度可以取决于点t。于是，序列一致收敛必逐点收敛，但反之则不然。

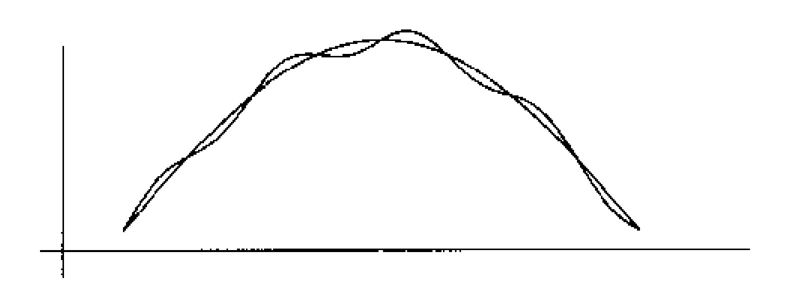


图 0.2 两个彼此一致接近的函数

若f_n收敛到$L^2[a,b]$上的f，那么平均来说，除了某些点远离$f(t)$之外，f_n是接近f的。例如图 0.3 示出了在L^2上，两个函数的接近程度，尽管有些点相差很远。

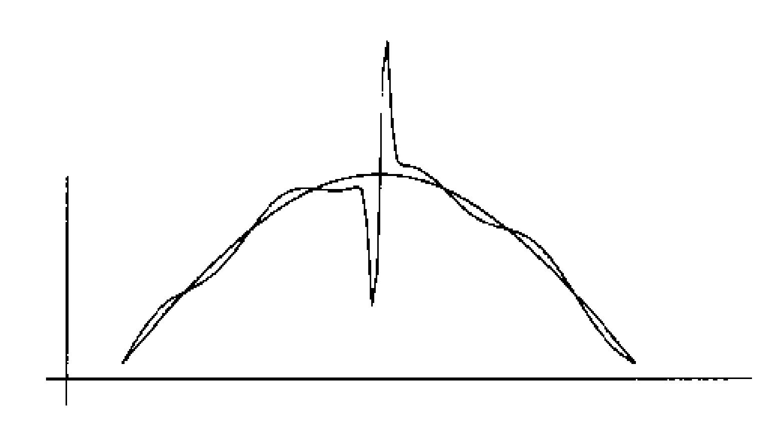


图 0.3 两个依L^2但非一致接近的函数

例 0.9

在区间$0 \leqslant t < 1$上，函数序列$f_n(t) = t^n$, $n = 1,2,3\cdots$逐点收敛到$f(t) = 0$。

因为对$0 \leqslant t < 1$，当$n \to \infty$时$t^n \to 0$. 然而，收敛不是一致的。随着$t \to 1$，t^n接近于0的速度放慢。例如，如果$t = 1/2$且$\epsilon = 0.001$，那么$|t^n| < \epsilon$，只要$n \geqslant 10$。然而，如果$t = 0.9$，那么直到$n \geqslant 66$时，才有$|t^n| < \epsilon$.

对一个固定的$r < 1$，在区间$[0, r]$上f_n一致收敛到$f = 0$。其实，如果$0 \leqslant t \leqslant r$，那么$|t^n| \leqslant r^n$。因此，只要$r^n < \epsilon$，则对所有的$0 \leqslant t \leqslant r$，$|f_n(t)|$必定小于$\epsilon$。即，在区间$[0, r]$上$f_n$接近0的速度不劣于$r^n$接近0的速度。

同时注意到，在$L^2[0,1]$上$f_n \to 0$，这是因为：

$$
\begin{aligned}
\|f_n\|_{L^2}^2 &= \int_0^1 (t^n)^2 \, dt \\
&= \left. \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \right|_0^1 \\
&= \frac{1}{2n+1} \to 0\text{，当}n \to \infty\text{时}
\end{aligned}
$$

如下面的定理所示，在有限区间$[a, b]$上的一致收敛比L^2收敛的收敛性要强。

定理 0.10 在一有限区间$a \leqslant t \leqslant b$上，若一序列$f_n$当$n \to \infty$时一致收敛到$f$，那么该序列也依$L^2[a, b]$收敛到$f$。反之不真。

证明 由一致收敛定义，对一个$\epsilon > 0$，总能找到一个整数N，使得：

$$|f_n(t) - f(t)| < \epsilon\text{，对}n \geqslant N\text{和}a \leqslant t \leqslant b\text{时}$$

该不等式意味着：

$$
\begin{aligned}
\|f_n - f\|_{L^2}^2 &= \int_a^b |f_n(t) - f(t)|^2 \, dt \\
&\leqslant \int_a^b \epsilon^2 \, dt\text{，}n \geqslant N \\
&= \epsilon^2 (b - a)
\end{aligned}
$$

因此，如果$n \geqslant N$，我们有$\|f_n - f\|_{L^2} \leqslant \epsilon\sqrt{b-a}$。因为$\epsilon$可以取任意小，所以该不等式意味着$f_n$依$L^2$收敛到$f$。

反之则不然。考虑$0 \leqslant t \leqslant 1$上的函数序列：

$$f_n(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t \leqslant 1/n \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

该序列依$L^2[0,1]$收敛到0，但不是在$0 \leqslant t < 1$上一致收敛到0的。相应的证明留给读者（见习题6）。

通常，序列逐点收敛不一定依L^2收敛。然而，若序列在L^2上一致有界，那么逐点收敛足够保证依L^2收敛（Lebesgue 控制收敛定理，见参考文献[17]）。在本章后面的习题中，有更进一步的例子来说明这三类收敛的相互关系。

0.4 Schwarz 不等式与三角不等式

内积的两个最重要的性质是 Schwarz 不等式和三角不等式，Schwarz 不等式为$|\langle X,Y\rangle| \leqslant \|X\|\,\|Y\|$。在$R^3$中，该不等式遵从余弦定理：

$$|\langle X,Y\rangle| = \|X\|\,\|Y\|\,|\cos(\theta)| \leqslant \|X\|\,\|Y\|$$

这里的θ是 X 与 Y之间的夹角。三角不等式为$\|X+Y\| \leqslant \|X\| + \|Y\|$。在$R^3$中，该不等式如图 0.4 所示，描述为两点间直线距离最短。

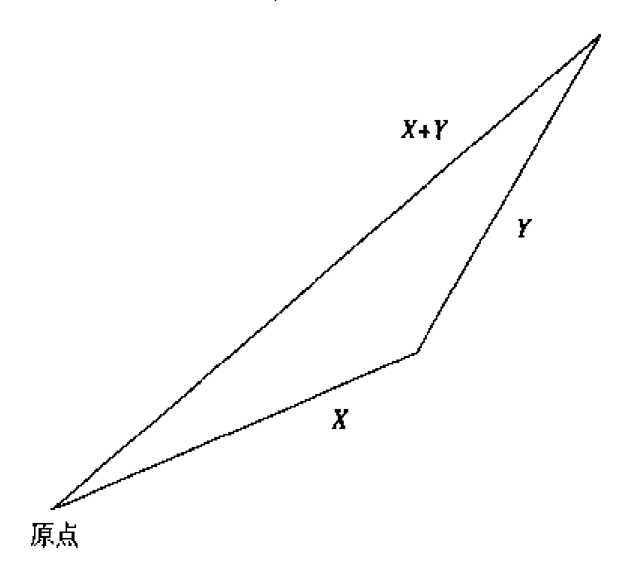


图 0.4　三角不等式

下面的定理指出 Schwarz 不等式和三角不等式在一般的内积空间中成立。

定理 0.11　设V，$\langle\cdot,\cdot\rangle$是一个内积空间（实的或复的），那么对所有的$X$，$Y \in V$，有：

- Schwarz 不等式：$|\langle X,Y\rangle| \leqslant \|X\|\,\|Y\|$。当且仅当 X 与 Y线性相关时，等号成立。而且，当且仅当 X 或Y是相互非负倍乘关系时，有$\langle X,Y\rangle = \|X\|\,\|Y\|$。
- 三角不等式：$\|X+Y\| \leqslant \|X\| + \|Y\|$。当且仅当 X 与 Y线性相关时，等号成立。

0.4.1 实内积空间的证明

假设矢量中的一个，例如Y是非零的，否则立即得证。令 t 是一个实变量，考

虑下述不等式：

$$0 \leqslant \|X - tY\|^2 = \langle X - tY, X - tY\rangle \quad (0.1)$$

$$= \|X\|^2 - 2t\langle X, Y\rangle + t^2\|Y\|^2 \quad (0.2)$$

上式右边是关于 t 的非负二次多项式，所以不可能有两个不同的实根。因此，其判别式必定非正。即：

$$判别式 = 4|\langle X, Y\rangle|^2 - 4\|X\|^2\|Y\|^2 \leqslant 0$$

重新调整一下该不等式，即可得到 Schwarz 不等式。

若 $\langle X, Y\rangle = \|X\|\,\|Y\|$，那么前述的判别式为 0，也即 $\|X - tY\|^2 = 0$ 有一个双重实根 $\hat{t}$。特别地，$X - \hat{t}Y = 0$ 或 $X = \hat{t}Y$ 意味着 $\langle X, Y\rangle = \hat{t}\|Y\|^2$。另一方面，$\langle X, Y\rangle = \|X\|\,\|Y\|$ 非负，所以 $\hat{t} \geqslant 0$。这样，如前所言，$X = \hat{t}Y$ 就是 Y 的非负倍乘。反之（即 X 是 Y 的非负倍乘，那么 $\langle X, Y\rangle = \|X\|\,\|Y\|$）很容易证明，留给读者。

0.4.2 复内积空间的证明

若 V 是一个复内积空间，证明同前类似。令 ϕ 为 $\langle X, Y\rangle$ 的辐角，即：

$$\langle X, Y\rangle = |\langle X, Y\rangle| e^{i\varphi}$$

考虑如下不等式：

$$\begin{aligned}
0 \leqslant \|e^{-i\phi}X - tY\|^2 &= \langle e^{-i\phi}X - tY, e^{-i\phi}X - tY\rangle \\
&= \|X\|^2 - t\left(\langle e^{-i\phi}X, Y\rangle + \langle Y, e^{-i\phi}X\rangle\right) + t^2\|Y\|^2 \\
&= \|X\|^2 - t\left(\langle e^{-i\phi}X, Y\rangle + \overline{\langle e^{-i\phi}X, Y\rangle}\right) + t^2\|Y\|^2 \\
&= \|X\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\left\{te^{-i\phi}\langle X, Y\rangle\right\} + t^2\|Y\|^2
\end{aligned}$$

这里 “Re” 表示 “实部”；即，若 $z = x + iy$，那么：

$$\mathrm{Re}\, z = x = \frac{z + \overline{z}}{2}$$

下面考虑 ϕ 的选择，因为中间项正好是 $-2t|\langle X, Y\rangle|$，而且右边项等于（0.2）式的右边项。余下的讨论过程同实内积空间时的情形。

0.4.3 三角不等式的证明

三角不等式的证明可由 Schwarz 不等式得到：

$$\begin{aligned}\|X+Y\|^2 &= \langle X+Y, X+Y\rangle \\ &= \|X\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,\{\langle X,Y\rangle\} + \|Y\|^2 \\ &\leqslant \|X\|^2 + 2\|X\|\,\|Y\| + \|Y\|^2 \quad \text{由 Schwarz 不等式} \\ &= (\|X\| + \|Y\|)^2\end{aligned}$$

把该不等式的两边开平方就得到了三角不等式。

若上述不等式成为等式，即$\langle X,Y\rangle = \|X\|\,\|Y\|$，由定理的第 1 部分可知 X 和 Y 是彼此非负的倍乘，证毕。

0.5 正交

0.5.1 定义与例子

对R^3中的标准内积，余弦定律是：

$$\langle X,Y\rangle = \|X\|\,\|Y\|\cos(\theta), \quad \theta = X\text{与}Y\text{之间的夹角}$$

上式意味着当且仅当$\langle X,Y\rangle = 0$时，X与Y正交（垂直）。我们将把该式作为正交的更一般定义。

定义 0.12 设 V 是内积空间。

- V 中两个矢量X和Y，若$\langle X,Y\rangle = 0$，则称X与Y正交。
- 矢量集 $e_i, i=1,\cdots,N$ 称为正交，是指如果其中每个e_i具有单位长度 $\|e_i\|=1$，而且彼此正交，即$i\neq j$时e_i与e_j正交。
- 两个子空间V_1和 $V_2\subset V$ 称为正交，是指V_1中的每个矢量同 V_2中的每个矢量正交。

正交基或 V 的正交系统是指空间 V 中的一个矢量基，它是正交的。

例 0.13

由矢量$(1,1)$产生的线段$y=x$与由矢量$(1,-1)$产生的线段$y=-x$正交。

例 0.14

在 R^3 中的线 $x/2=-y=z/3$，其在矢量 $(2,-1,3)$ 方向上的点与平面 $2x-y+3z=0$正交。

例 0.15

对于空间 $L^2([0,1])$，其中的任何两个函数若一个为 0，另一个非 0，则它们正交。

例如$f(t)$在$0 \leqslant t < 1/2$时非 0，而$g(t)$在$1/2 \leqslant t < 1$时非 0，所以$f(t)\overline{g(t)}$总为零。因此，$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\, dt = 0$。

例 0.16

令

$$\phi(t) = \begin{cases} 1, & \text{若 } 0 \leqslant t < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \qquad \psi(t) = \begin{cases} 1, & \text{若 } 0 \leqslant t < 1/2 \\ -1, & \text{若 } 1/2 \leqslant t < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

则ϕ与ψ在$L^2[0,1]$中正交，因为：

$$\langle \phi, \psi \rangle = \int_0^{1/2} 1\, dt - \int_{1/2}^1 1\, dt = 0$$

对比前述例子，注意到ϕ和ψ是正交的，且ϕ和ψ在相同集，即$0 \leqslant t \leqslant 1$内非 0。在 Haar 系里，称$\phi$为尺度函数，$\psi$为小波函数。在后面有关小波的章节里，会再次见到它们。

例 0.17

函数$f(t) = \sin t$和$g(t) = \cos t$在$L^2([-\pi, \pi])$上正交，因为：

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin(t)\cos(t)\, dt \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(2t)\, dt \\ &= \frac{-1}{4}\cos(2t)\Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

因为$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(t)\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(t)\, dt = \pi$，所以函数$\frac{\sin(t)}{\sqrt{\pi}}$和$\frac{\cos(t)}{\sqrt{\pi}}$在$L^2([-\pi, \pi])$中正交。更一般地，我们将在第 1 章中看到函数

$$\frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(nt)}{\sqrt{\pi}}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

是正交的。该事实在讨论傅里叶级数时是非常重要的。

矢量可根据某个正交基展开，见下面的定理描述。

定理 0.18 设V_0是内积空间V的一个子空间。假设$\{e_1, \cdots, e_N\}$是V_0的正交基，

若$v \in V_0$，那么：

$$v = \sum_{j=1}^{N} \langle v, e_j \rangle e_j$$

证明　因为$\{e_1, \cdots, e_N\}$是V_0的一个基，任何矢量$v \in V_0$可惟一地表示为e_j的一个线性组合：

$$v = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j e_j$$

为了得到α_k，上式两端对e_k取内积：

$$\langle v, e_k \rangle = \sum_{j=1}^{N} \langle \alpha_j e_j, e_k \rangle$$

因为e_j是正交的，上式右端的非零项仅发生在$j = k$时。因此有：

$$\langle v, e_k \rangle = \alpha_k \langle e_k, e_k \rangle = \alpha_k$$

即$\alpha_k = \langle v, e_k \rangle$。

0.5.2　正交投影

假设$\{e_1, \cdots, e_N\}$是内积空间 V 的正交基。若v是由$\{e_1, \cdots, e_N\}$张成的，那么由定理 0.18，公式

$$v = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j e_j \tag{0.3}$$

成立，这里$\alpha_j = \langle v, e_j \rangle$。若$v$不是由$\{e_1, \cdots, e_N\}$线性张成的，那么由上式得不到$\alpha_j$的解。此时最好的办法是找一个$v_0$，它是由$\{e_1, \cdots, e_N\}$线性张成的，且与$v$尽可能地接近。更一般地，设$V_0$是内积空间 V 的一个子空间，$v \in V$，但$v \notin V_0$，如图 0.5 所示。下一步是如何决定与v接近的矢量$v_0 \in V_0$。在下面的定义中，矢量(v_0)有一个特殊的名字。

定义 0.19　假设V_0是内积空间 V 的一个有限维子空间。对任何$v \in V$，v在V_0上的正交投影是惟一的矢量$v_0 \in V_0$，它最接近 v；即：

$$\|v - v_0\| = \min_{w \in V_0} \|v - w\|$$

如图 0.5 所示，对最接近于v的v_0的选择应使$v - v_0$（由v_0至v的矢量）与V_0正

交。当然，若基本的空间是R^2或R^3时，图是容易画出的。但在更复杂的内积空间，如L^2中，图示就很抽象，可能准确也可能不准确（即L^2上的一个元素不一定真的是平面上的一个点，如图 0.5 中的那样）。下面的定理表明，我们在R^2中的有关正交的直觉在一般的内积空间中也是对的。

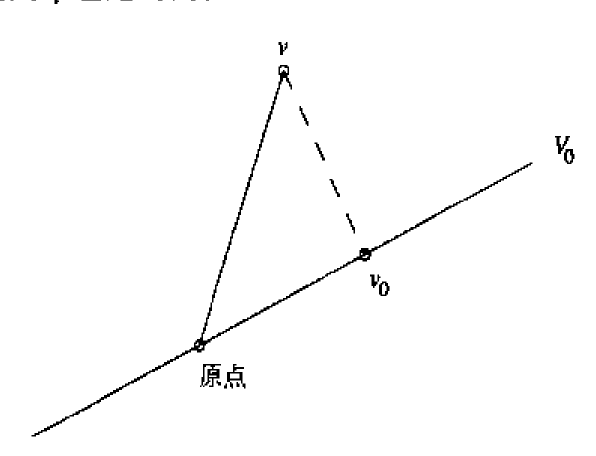


图 0.5 v 在V_0上的正交投影

定理 0.20 若V_0是内积空间 V 的一个有限维子空间，令 v是 V 中一个元素。那么其正交投影v_0有下列性质：$v - v_0$与V_0中的每个矢量正交。

证明 首先看到，若v_0是最接近矢量 v的，那么$v - v_0$与$w \in V_0$正交。考虑函数：

$$f(t) = \|v_0 + tw - v\|^2 \quad t \in R$$

它描述了 $v_0 + tw \in V_0$与 v的距离的平方。若v_0是V_0中最接近 v的元素，那么当$t = 0$时，f 最小。为简单起见，下面将仅考虑基本内积空间 V 是实的情形。展开 f 有：

$$\begin{aligned} f(t) &= \langle (v_0 - v) + tw, \ (v_0 - v) + tw \rangle \\ &= \|v_0 - v\|^2 + 2t\langle v_0 - v, w\rangle + t^2\|w\|^2 \end{aligned}$$

因为当$t = 0$时，f 最小，其导数在$t = 0$处必为 0。我们有：

$$f'(t) = 2\langle v_0 - v, w\rangle + 2t\|w\|^2$$

所以

$$0 = f'(0) = 2\langle v_0 - v, w\rangle \tag{0.4}$$

由此得到结论：$v_0 - v$与 w正交。

逆亦成立：若$v_0 - v$与w正交，那么由公式（0.4）得$f'(0) = 0$。因为$f(t)$是一个关于 t 的非负的二次多项式，所以拐点$t = 0$必与最小值对应。因此，当$t = 0$时，$\|v_0 + tw - v\|^2$最小。因为 w 是 V_0 中任意选取的一个矢量，所以可以断定v_0是V_0中最接近 v 的。

根据V_0中的一个正交基，矢量 v在V_0中的投影容易得到，如下定理所示。

定理 0.21　设 V 是一个内积空间，而V_0是一个有正交基$\{e_1,\cdots,e_N\}$的 N 维子空间。矢量$v\in V$在V_0上的正交投影由下式给出：

$$v_0=\sum_{j=1}^{N}\alpha_j e_j,\quad \alpha_j=\langle v,e_j\rangle$$

注意，在 v属于V_0的一类特殊情况下，v等于其正交投影v_0。此时，前述公式中$v_0=v$，这与定理 0.18 中情形一样。

证明　令$v_0=\sum_{j=1}^{N}\alpha_j e_j,\alpha_j=\langle v,e_j\rangle$。根据定理 0.20，我们要做的是证明$v-v_0$与任一矢量$w\in V_0$正交。因为$e_1,\cdots,e_N$是$V_0$的一个基，表明$v-v_0$与每个$e_k$, $k=1,\cdots,N$正交。我们有：

$$\langle v-v_0,e_k\rangle=\langle v-\sum_{j=1}^{N}\alpha_j e_j,\ e_k\rangle$$

因为$e_1,\cdots,e_N$是正交的，则上面和式中仅有的非零项是当 $j=k$时：

$$\begin{aligned}\langle v-v_0,e_k\rangle&=\langle v,e_k\rangle-\alpha_k\langle e_k,e_k\rangle\\&=\langle v,e_k\rangle-\alpha_k\quad \text{因为 } \|e_k\|=1\\&=0\quad \text{因为 } \alpha_k=\langle v,e_k\rangle\end{aligned}$$

所以$v-v_0$与每个e_k正交，从而也与V_0中的每个矢量正交，证毕。

例 0.22

令V_0是由$L^2([-\pi,\pi])$中的$\cos x$和$\sin x$张成的。如例 0.17，函数

$$e_1=\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\quad e_2=\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}$$

在$L^2([-\pi,\pi])$中是正交的。f 在V_0上的投影由下式给出：

$$f_0=\langle f,e_1\rangle e_1+\langle f,e_2\rangle e_2$$

现在，$f(x)\cos(x)=x\cos(x)$是奇对称的，所以$\langle f,e_1\rangle=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(x)\,dx=0$。对于其他项，

$$\begin{aligned}\langle f,e_2\rangle&=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin(x)\,dx\\&=2\sqrt{\pi}\quad [\text{分部积分}]\end{aligned}$$

因此，$f(x)=x$在V_0上的投影为：

$$f_0 = \langle f, e_2 \rangle e_2 = 2\sqrt{\pi}\,\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}} = 2\sin(x)$$

例 0.23

考虑空间V_1是由$\phi(x)=1$，$0 \leqslant x < 1$和$\psi(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x < 1/2 \\ -1, & 1/2 \leqslant x < 1 \end{cases}$张成的。函数$\phi$与$\psi$是前述的Haar尺度函数和小波函数。这两个函数在$L^2([0,1])$中正交。令$f(x)=x$，因为

$$\langle f, \phi \rangle = \int_0^1 x\,dx = 1/2$$

而且

$$\langle f, \psi \rangle = \int_0^{1/2} x\,dx - \int_{1/2}^1 x\,dx = -1/4$$

所以函数f在V_1中的正交投影是：

$$f_0 = \langle f, \phi \rangle \phi + \langle f, \psi \rangle \psi = \phi/2 - \psi/4 = \begin{cases} 1/4, & 0 \leqslant x < 1/2 \\ 3/4, & 1/2 \leqslant x < 1 \end{cases}$$

正交于一个给定子空间的矢量集合有一个特殊的名字。

定义 0.24 设V_0是内积空间V的子空间，V_0的正交补，记为$V_0^{\perp}$，是V上所有与V_0正交的矢量集合；即：

$$V_0^{\perp} = \{v \in V;\ \langle v, w \rangle = 0,\ w \in V_0\}$$

如图0.6所示，V中的每个矢量可看做是V_0中一个矢量与$V_0^{\perp}$中的一个矢量的和。来自该Euclidean空间的直觉结论在一般的内积空间里同样成立，这就是下面的定理所表述的。

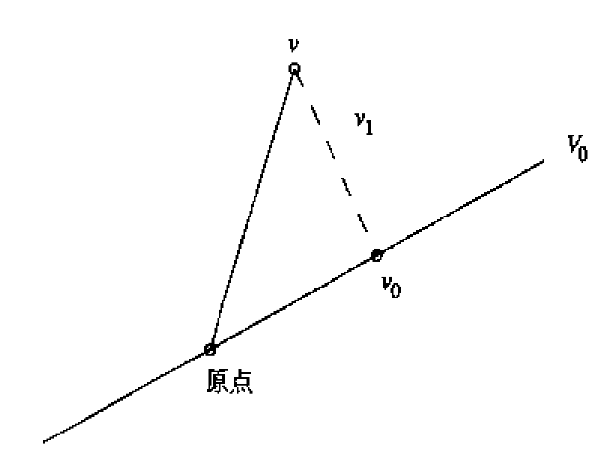


图0.6 $V = V_0 \oplus V_0^{\perp}$; $v = v_0 + v_1$，这里$v_0 \in V_0$, $v_1 \in V_0^{\perp}$

定理 0.25　设V_0是内积空间 V 的有限维子空间。对每个矢量$v \in V$，可以惟一地表示为$v = v_0 + v_1$，这里$v_0 \in V_0$，$v_1 \in V_0^{\perp}$；即：

$$V = V_0 \oplus V_0^{\perp}$$

证明　设v属于 V，并令v_0是其在V_0上的正交投影。令$v_1 = v - v_0$，则有：

$$v = v_0 + (v - v_0) = v_0 + v_1$$

由定理 0.20 可知，v_1与V_0中的每个矢量正交。所以，v_1属于$V_0^{\perp}$。

例 0.26

考虑平面$V_0 = \{2x - y + 3z = 0\}$。矢量集

$$\left\{e_1 = \frac{1}{\sqrt{21}}(1, -4, -2) \text{ 和 } e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2, 1, -1)\right\}$$

形成V_0的正交基，所以给定$v = (x, y, z) \in R^3$，矢量

$$\begin{aligned} v_0 &= \langle v, e_1\rangle e_1 + \langle v, e_2\rangle e_2 \\ &= \left(\frac{x - 4y - 2z}{21}\right)(1, -4, -2) + \left(\frac{2x + y - z}{6}\right)(2, 1, -1) \end{aligned}$$

是 v在V_0中的正交投影。

矢量$e_3 = (2, -1, 3)/\sqrt{14}$是一个垂直于该平面的单位矢量。所以

$$v_1 = \langle v, e_3\rangle e_3 = \frac{(2x - y + 3z)}{14}(2, -1, 3)$$

是$v = (x, y, z)$在$V_0^{\perp}$上的正交投影。

本节的定理对某些无限维空间也成立，但对无限维空间的详细讨论需要用到实函数论的深入知识（见参考文献[18]）[①]。

0.5.3　Gram-Schmidt 正交化方法

定理 0.18 和定理 0.21 指出了寻找一个正交基的重要性。没有正交基，在一个子空间上的正交投影的计算就会非常困难。若正交基没有准备好，那么 Gram-Schmidt 正交化方法正好描述了如何由一个给定的子空间构造正交基的方法。

定理 0.27　设V_0是内积空间 V 的 N 维子空间，令v_j，$j = 1, \cdots, N$是V_0的一

---

① 此处按照中文数学习惯用语做了调整——译者注。

个基。那么存在一个正交基$\{e_1,\cdots,e_N\}\in V_0$，其中$e_j$是$v_1,\cdots,v_j$的线性组合。

证明 首先定义$e_1=v_1/\|v_1\|$。显然，e_1具有单位长度。令v_0是v_2在由e_1张成的线上的正交投影。由定理 0.21 有：

$$v_0=\langle v_2,e_1\rangle e_1$$

图 0.7 示出了由v_0至v_2的矢量与e_1正交。矢量E_2是：

$$\begin{aligned}E_2&=v_2-v_0\ (\text{由矢量}v_0\text{至}v_2)\\&=v_2-\langle v_2,e_1\rangle e_1\end{aligned}$$

而且

$$\langle E_2,e_1\rangle=\langle v_2-\langle v_2,e_1\rangle e_1,e_1\rangle=\langle v_2,e_1\rangle-\langle v_2,e_1\rangle\langle e_1,e_1\rangle=0$$

这再次证实了我们由图 0.7 得到的直观结论。

注意，E_2不能等于 0，否则v_2与e_1将线性相关。为得到一个单位长度的矢量，定义$e_2=E_2/\|E_2\|$。e_1与e_2彼此正交，又因为e_1是v_1的倍乘，所以矢量e_2是v_1和v_2的线性组合。

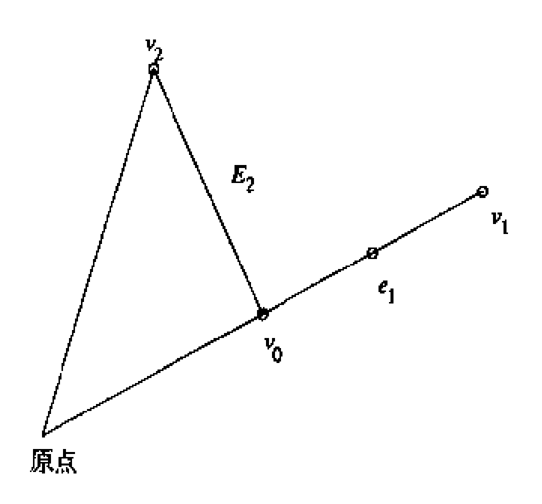


图 0.7 Gram-Schmidt 正交化方法

若$N>2$，继续此过程。考虑v_3在由e_1和e_2张成的空间上的正交投影：

$$\text{正交投影}=v_0=\langle v_3,e_1\rangle e_1+\langle v_3,e_2\rangle e_2$$

然后令

$$\begin{aligned}E_3=v_3-v_0&=v_3-(\langle v_3,e_1\rangle e_1+\langle v_3,e_2\rangle e_2)\\e_3&=E_3/\|E_3\|\end{aligned}$$

由前面所示（如对E_2）的证明过程可见，E_3与e_1和e_2正交。那么，$\{e_1,e_2,e_3\}$就是由v_1，v_2，v_3张成的空间的正交基。至此，正交化过程清楚无误了。

0.6　线性算子及其伴随算子

0.6.1　线性算子

首先回顾一下线性映射的定义。

定义 0.28　矢量空间 V 与矢量空间 W 的线性算子（映射）是一个函数 $T:V\to W$，它满足：

$$T(\alpha v+\beta w)=\alpha T(v)+\beta T(w),\ \text{其中}\ v,\ w\in V\quad \alpha,\beta\in C$$

如果 V 和 W 是有限维的，那么 T 常常用给定一组基下的矩阵来表示，令 $\{v_1,\cdots,v_n\}$ 是 V 的基，$\{w_1,\cdots,w_m\}$ 是 W 的基。对每个 $1\leqslant j\leqslant n, Tv_j\in W$，它能在 $w_1,\cdots,w_m$ 下展开：

$$T(v_j)=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}w_i \tag{0.5}$$

这里 a_{ij} 是复数。对于任意矢量 $v=\sum_j x_jv_j\in V\ (x_j\in C)$，$T(v)$ 的值可以通过下面公式来计算：

$$T(v)=T\left(\sum_{j=1}^{n}x_jv_j\right)=\sum_{j=1}^{n}x_jT(v_j)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}x_j)w_i\quad \text{由（0.5）式}$$

$$=\sum_{i=1}^{m}c_iw_i$$

w_i 的系数是 $c_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j$，它在下面的矩阵积中由第 i 行确定：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

这样，基矢量 $v_j\in V$ 如何被映射到 W 的基矢量 w_i 就决定了矩阵 (a_{ij}) [见（0.5）式]。同时，该矩阵确定一任意矢量 v 如何映射到 W。

换句话说，一个线性算子 $T:V\to W$ 被称为是有界的：如果它把 V 中的单位球映射为 W 中的一个有界系。这意味着存在一个数 $0\leqslant M<\infty$，满足：

$$\{Tv;\ v\in V\ \text{且}\ \|v\|\leqslant 1\}\subset\{w\in W;\ \|w\|\leqslant M\}$$

此时，T 的范数被定义为最小的 M。在有限维内积空间的所有线性映射都是有界的。

例如，从任何一个内积空间到它的任意一个子空间（有限维或无限维）的正交投影映射是一个有界线性算子。

0.6.2 伴随算子

若 V 和 W 是内积空间，那么有时需要通过把算子 T 转移到内积的另一边来计算 $\langle T(v),w\rangle_W$。换句话说，我们想写为：

$$\langle T(v),w\rangle_W=\langle v,T^*(w)\rangle_V$$

这里，$T^*:W\to V$。我们下面把这样的一个映射的定义正规化。

定义 0.29 若 $T:V\to W$ 是两个内积空间之间的线性算子，那么 T 的伴随算子是线性算子 $T^*:W\to V$，它满足 $\langle T(v),w\rangle_W=\langle v,T^*(w)\rangle_V$。在两个内积空间的每个有界线性算子都有伴随算子。下面是两个线性算子的伴随算子的例子。

例 0.30

令 $V=C^n$ 和 $W=C^m$ 具有标准内积。设 $T:C^n\to C^m$ 是一个线性算子，关于标准基 $e_j=(0,\cdots,1,\cdots,0)$（第 j 个分量是 1），其矩阵 $a_{ij}\in C$。

若 $X=(x_1,\cdots,x_n)\in C^n$，$Y=(y_1,\cdots,y_m)\in C^m$，则有

$$\begin{aligned}\langle T(X),Y\rangle&=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\overline{y_i}\\&=\sum_{j=1}^{n}x_j\overline{\left(\sum_{i=1}^{m}\overline{a_{ij}}y_i\right)}\text{（交换和的次序）}\\&=\sum_{j=1}^{n}x_j\overline{\left(\sum_{i=1}^{m}a^*_{ji}y_i\right)}\end{aligned}$$

这里 $a^*_{ji}=\overline{a_{ij}}$（转置共轭）。右边是 $\langle X,T^*(Y)\rangle$，这里 $T^*(Y)$ 的第 j 个分量是 $\sum_{i=1}^{m}a^*_{ji}y_i$。这样 T 的伴随矩阵就是 T 矩阵的共轭转置。

例 0.31

设 g 是区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上的有界函数，令 $T_g:L^2([a,b])\to L^2([a,b])$ 定义为：

$$T_g(f)(x)=g(x)f(x)$$

T_g 的伴随算子恰为：

$$T_g^*(h)(x)=\overline{g(x)}h(x)$$

因为

$$\langle T_g(f), h\rangle = \int_a^b g(x)f(x)\overline{h(x)}\,dx = \int_a^b f(x)\overline{\overline{g(x)}h(x)}\,dx = \langle f, \overline{g}h\rangle$$

下面的定理计算两个算子的复合的伴随算子。

定理 0.32 设$T_1: V \to W$和$T_2: W \to U$是两个内积空间之间的有界线性算子。那么，$(T_2 \circ T_1)^* = T_1^* \circ T_2^*$。

证明 对于矢量$v \in V$，$u \in U$，有：

$$\langle T_2(T_1(v)), u\rangle = \langle T_1(v), T_2^*(u)\rangle = \langle v, T_1^*(T_2^*(u))\rangle$$

另一方面，由伴随矩阵的定义有：

$$\langle T_2(T_1(v)), u\rangle = \langle v, (T_2 \circ T_1)^* u\rangle \tag{0.6}$$

因此

$$\langle v, (T_2 \circ T_1)^* u\rangle = \langle v, T_1^*(T_2^*(u))\rangle$$

对所有的$v \in V$都成立。由习题 17，两矢量$u_0, u_1 \in V$，若对于V空间的任意一个矢量$v \in V$都有$\langle v, u_0\rangle = \langle v, u_1\rangle$，那么$u_0 = u_1$。因此，由（0.6）式得出：

$$(T_2 \circ T_1)^* u = T_1^*(T_2^*(u))$$

证毕。

在下面的定理中，我们将计算正交投影算子的伴随算子。

定理 0.33 设V_0是内积空间V的子空间。令$\pi: V \to V_0$是一个映射，它把$v \in V$正交投影到V_0。那么π的伴随算子是映射$\iota: V_0 \to V$，这里如果$v_0 \in V_0$，则$\iota(v_0) = v_0$，它在这里被当做V中的一个元素。

证明 由定理 0.25，V空间的每个矢量v可以写为$v = v_0 + v_1$，这里$v_0 \in V_0$且v_1和V正交。注意$\pi(v) = v_0$。因此，对于$u_0 \subset V_0$有：

$$\langle \pi(v), u_0\rangle_{V_0} = \langle v_0, u_0\rangle_{V_0}$$

此时，子空间V_0从V中继承了其内积。这样就有：

$$\begin{aligned}
\langle \pi(v), u_0\rangle_{V_0} &= \langle v_0, u_0\rangle_V && \text{因为 } u_0 \in V_0 \\
&= \langle v_0 + v_1, u_0\rangle_V && \text{因为 } v_1 \in V_0^\perp \\
&= \langle v, u_0\rangle_V
\end{aligned}$$

所以

$$\langle \pi(v), u_0 \rangle_{V_0} = \langle v, u_0 \rangle_V$$

此外，由伴随算子的定义

$$\langle \pi(v), u_0 \rangle_{V_0} = \langle v, \pi^*(u_0) \rangle_V$$

通过比较$\langle \pi(v), u_0 \rangle_{V_0}$的这两个表达式得到，对$v \in V$有：

$$\langle v, u_0 \rangle_V = \langle v, \pi^*(u_0) \rangle_V$$

由习题 17，得到$\pi^*(u_0) = u_0$，正如本定理所述。

0.7 最小二乘和线性预测编码

本节我们将运用一些关于线性代数和内积空间中的基本原理，来分析最小二乘算法。作为引言，首先描述给定一批数据后如何寻找它的最佳拟合线。然后基于最小二乘算法给出大概思路。作为最小二乘的进一步应用，给出了基于线性预测编码的思想，它是一种数据压缩算法。在下一章中，我们利用最小二乘法给出了一个通过三角多项式来近似信号（或函数）的算法。

0.7.1 数据的最佳拟合线

考虑如下问题。设有数据点x_i和y_i，$i = 1, \cdots, N$，而且，若$i \neq j$，则$x_i \neq x_j$。我们希望找到一个直线方程$y = mx + b$，来最佳地拟合所有给定的数据。图 0.8 给出了 4 个数据点（用小圆圈表示）的一个例子，同时也给出了最近似于通过这四个点的直线。

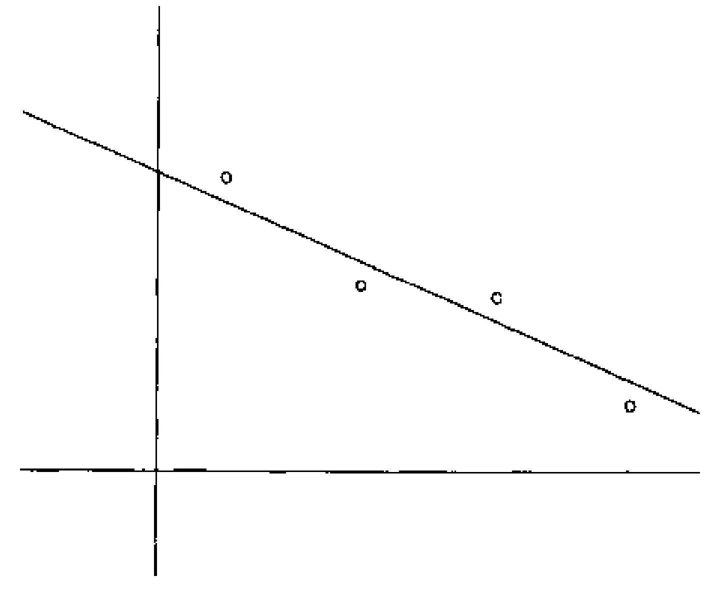


图 0.8 最小二乘近似

这里的近似表示误差（数据和这条线之间）的平方和，与采用任何其他的直线时相比，相应的误差都要小。设要找的这条线是 $y = mx + b$。图 0.9 示出了这条直线在$x = x_i$处的值和数据点(x_i, y_i)之间的误差是$|y_i - (mx_i + b)|$。

因此，要寻找m和b使得下式最小：

$$E = \sum_{i=1}^{N} |y_i - (mx_i + b)|^2$$

E的值可以被看做是R^N空间中矢量$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}$与矢量$mX + bU$的距离，这里：

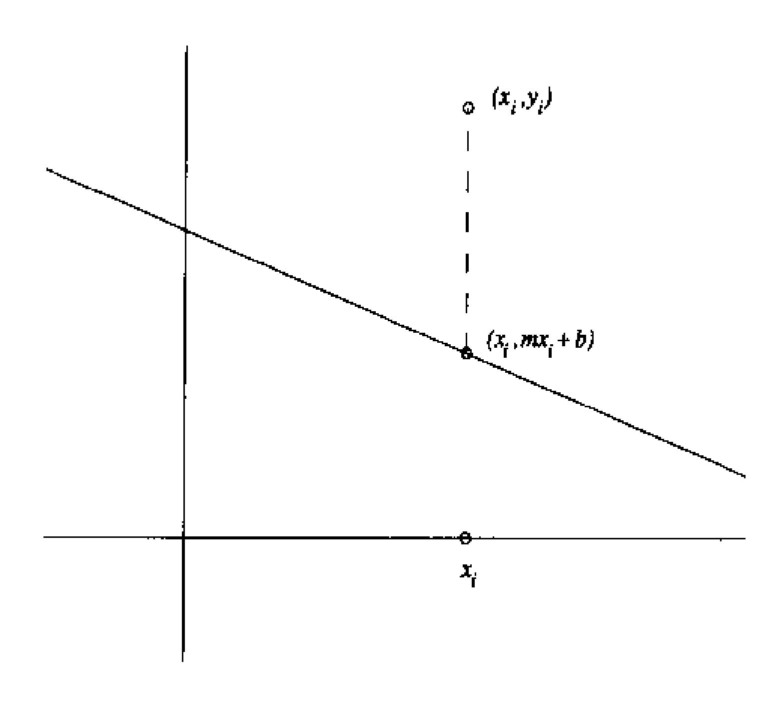


图 0.9　在x_i处的误差是$|y_i - (mx_i + b)|$（虚线的长度）

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \tag{0.7}$$

随着m和b在实数范围内变化，表达式$mX + bU$扫过一个二维平面M。这样我们这个最小二乘问题可以有如下的几何解释：在M上找一个点$P = mX + bU$，使得它最逼近于Y（见图 0.10）。

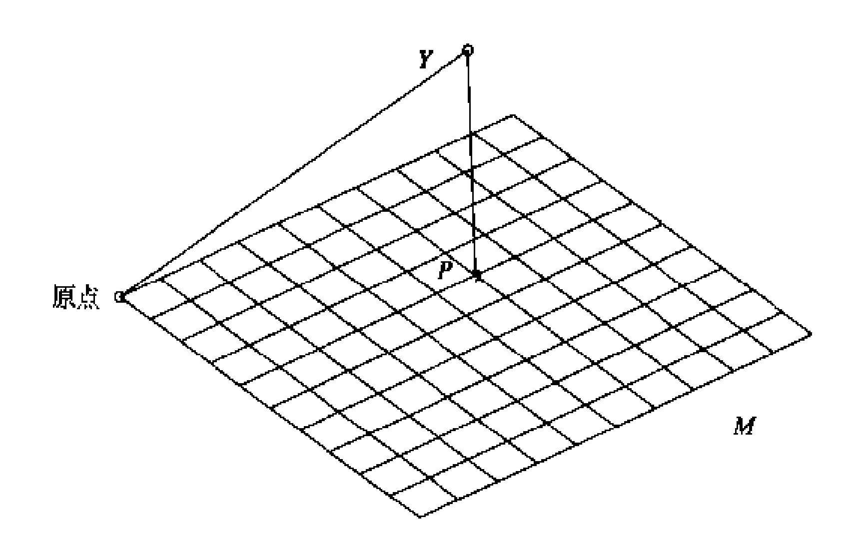


图 0.10 P 是平面 M 上最接近于 Y 的点

点P一定是Y在M上的正交投影。尤其是$Y-P$一定垂直于M。因为M是由矢量X和U生成的，$Y-P$必定与X和U正交。因此，要寻找点$P=mX+bU$，使得它满足下面的两个方程：

$$0=\langle (Y-P),X\rangle =\langle (Y-(mX+bU)),X\rangle$$
$$0=\langle (Y-P),U\rangle =\langle (Y-(mX+bU)),U\rangle$$

或者

$$\langle X,Y\rangle = m\langle X,X\rangle + b\langle X,U\rangle$$
$$\langle U,Y\rangle = m\langle X,U\rangle + b\langle U,U\rangle$$

这些方程可以写成矩阵形式：

$$\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_N \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_N \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_N & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m \\ b \end{pmatrix}$$

注意，x_i和y_i是已知的数据点。通过求出前述线性系统的未知参数m和b，从而得到这个最小二乘问题的解。以上讨论可归纳为以下定理。

定理 0.34 设$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_N\}$和$Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_N\}$是两列数据集。直线方程$y=mx+b$在最小平方意义上对所有的数据$(x_1,y_1),\cdots,(x_N,y_N)$的最佳逼近可以通过求解下面的线性方程来得到：

$$Z^TY=Z^TZ\begin{pmatrix} m \\ b \end{pmatrix}$$

对于m和b，这里：

$$Z = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_N & 1 \end{pmatrix}$$

如果x_i各不相同，那么系统方程对于m和b有下面的惟一解：

$$m = \frac{\langle Y, X\rangle - N\overline{x}\,\overline{y}}{\sigma_x}, \quad b = \frac{\overline{y}(\sum_i x_i^2) - \overline{x}\langle X, Y\rangle}{\sigma_x}$$

这里 $\sigma_x = \sum_i (x_i - \overline{x})^2$, $\overline{x} = (\sum_i x_i)/N$, $\overline{y} = (\sum_i y_i)/N$。

证明 把m和b的计算留做习题（见习题 24）。只要证明Z^TZ是满秩的（即可逆），那么m和b的解的惟一性就得证。为此，假定x_i不是完全相同的，那么矢量X和U是线性独立的，所以矩阵Z的秩是2。此外，对任何矢量$V \in R^2$有：

$$\begin{aligned} \langle (Z^TZ)V, V\rangle &= \langle (Z)V, (Z)V\rangle \quad (\text{见例 } 0.30) \\ &= |(Z)V|^2 \\ &\geqslant 0 \end{aligned}$$

因为Z是最大秩矩阵（也就是 2）[1]。若$(Z)V=0$当且仅当$V=0$。因此，$\langle (Z^TZ)V, V\rangle > 0$对所有的非零$V$成立，这意味着$Z^TZ$是正定的。此外，矩阵$Z^TZ$是对称阵，因为它的转置$(Z^TZ)^T$和它本身相等。根据线性代数的基本定理，这个正定对称矩阵一定非奇异。所以，方程

$$(Z^TZ)\begin{pmatrix} m \\ b \end{pmatrix} = Z^T(Y)$$

对于m和b有惟一解。

0.7.2 通用最小二乘算法

设Z是一个$N \times q$矩阵（可能有复数部分），令Y是R^N（或C^N）空间的一个矢量。线性代数就是要研究方程$ZV = Y$，详细地写出就是：

$$\begin{pmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{N1} & \cdots & z_{Nq} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}$$

如果$N>q$，那么方程$ZV = Y$对于$V \in C^q$通常没有惟一解，因为方程的个数(N)比未知数的个数$(v_1, \cdots, v_q)$多。如果没有惟一解，那么最小二乘问题就变为寻求次优

---

① 此处最好称为满秩阵——译者注。

解：找一个矢量 $V \in C^q$，从而 ZV 尽可能地逼近于 Y。

在为一组数据点 (x_i, y_i), $i = 1, \cdots, N$ 寻找最佳拟合线的问题中，矩阵 Z 为：

$$Z = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_N & 1 \end{pmatrix} \quad (0.8)$$

矢量 Y 和 V 是：

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} m \\ b \end{pmatrix}$$

此时，矩阵积 ZV 为：

$$\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_N & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mx_1 + b \\ \vdots \\ mx_N + b \end{pmatrix} = mX + bU$$

这里的 X 和 U 是（0.7）中给出的矢量。这样，寻找矢量 $V = (m, b)$ 使得 ZV 最逼近于 Y，等效于寻找数据 (x_i, y_i), $i = 1, \cdots, N$ 的最佳拟合线的斜率和截距，如上节所述。

最小二乘的通用算法在下面的定理中给出。

定理 0.35 设 Z 是一个 $N \times q$ 矩阵（可能有复数部分），有最大秩且 $N \geqslant q$。令 Y 是 R^N 或 C^N 空间的一个矢量，则有一个惟一的矢量 $V \in C^q$ 使得 ZV 最逼近于 Y。并且矢量 V 是下列矩阵方程的惟一解：

$$Z^*Y = Z^*ZV$$

如果 Z 是一个实矩阵，那么前面的方程变为：

$$Z^TY = Z^TZV$$

注意，在最佳拟合线问题中的矩阵 Z [在（0.8）式中] 与方程 $Z^TY = Z^TZV$ 中的 Z（在定理 0.34 中）是一样的。

证明 这个定理的证明与构造最佳拟合线时给出的证明相似。令 $Z_1, \cdots, Z_q$ 是矩阵 Z 的列矢量，那么 $ZV = v_1Z_1 + \cdots + v_qZ_q$ 是由 $Z_1, \cdots, Z_q$ 生成的子空间 $M \subset C^N$ 内的点。我们希望找到最接近于 Y 的点 ZV。如图 0.11 所示，$Y - ZV$ 必定正交于 M，或者等同于，$Y - ZV$ 必定与生成 M 的 $Z_1, \cdots, Z_q$ 正交。即：

$$\langle Y - ZV, Z_i \rangle = 0 \quad 1 \leqslant i \leqslant q$$

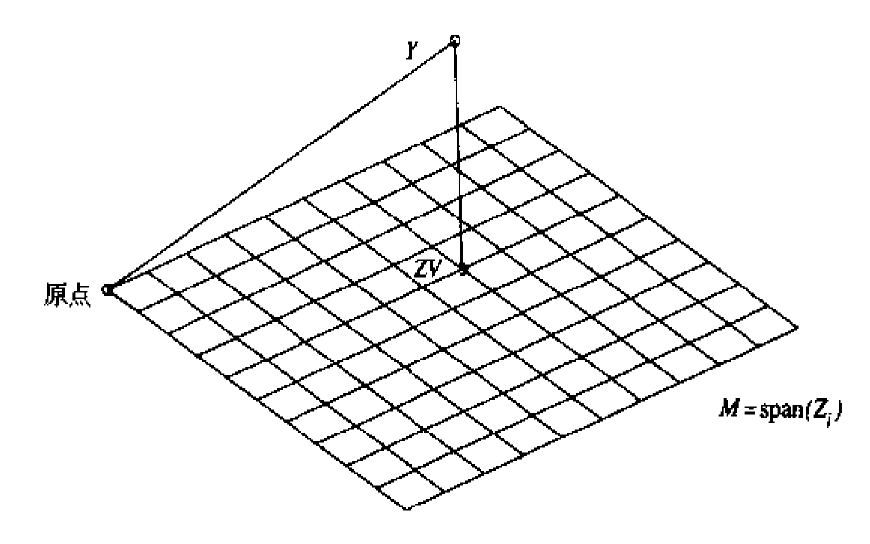


图 0.11　$Y - ZV$必须与$M = \text{span}\{Z_1, \cdots, Z_q\}$正交

这些方程可简写为：

$$Z^*(Y - ZV) = 0$$

因为这个（矢量）方程的第i个部分是$Y - ZV$和Z_i的内积。重新整理该方程得

$$Z^*Y = Z^*ZV$$

证毕。

矩阵Z^*Z的维数是$q \times q$，通过与定理 0.34 中同样的证明过程，得出该矩阵是满秩的（用Z有最大秩这个事实）。因此，方程

$$Z^*Y = Z^*ZV$$

有惟一解$V \in C^q$。证毕。

例 0.36

设有一组数据点$\{(x_i, y_i),\ i = 1, \cdots, N\}$，其表现形式是二次型而不是线性模式。那么可以得到最佳的二次逼近形式$y = ax^2 + bx + c$。此时，就是要寻求(a, b, c)来使得E最小：

$$E = \sum_{i=1}^{N} |y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)|^2$$

把下面几个式子代入定理 0.35：

$$Z = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_N^2 & x_N & 1 \end{pmatrix} \quad V = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}$$

由定理 0.35，这个最小二乘问题的解 $V=(a,b,c)$ 就是 $Z^TZV=Z^TY$ 的解。习题 28 要求读者用习题中特定的数据来解决这个问题。

0.7.3 线性预测编码

下面，我们把最小二乘分析过程用于如何有效地传输信号的问题中。如前所述，计算机每秒能处理百万甚至百亿条指令。然而，如果输出的信号要从一个地方传输到另一个地方（例如，从 Web 上下载一幅图片），信号常常要通过电话线或者一些其他媒质来传送，这些媒质每秒钟仅仅能传输数千比特（用电话线时，这个速率当前是每秒 60 千比特）。因此，我们可通过一些编码算法（数据压缩），仅仅传输那些信号的必要部分，而不传输信号包含的所有数据。

假设要传输一信号，经过某一离散化过程后，可以看成是一长串数字（0 或 1）：

$$x_1, x_2, x_3, \cdots$$

为简单起见，假设 x_i 是实的。信号的某些模式常常被重复（冗余）。如果这个重复是完美的，例如 1,1,0, 1,1,0, 1,1,0 等，那么就没有必要发送所有的数字。仅仅需要传输 1,1,0 这个模式和该模式重复的次数。然而，通常没有一个模式是完全重复的，但是可能有一些模式是几乎重复的。例如心脏的跳动节奏几乎就是如此，但不是精确的重复（若这是一个健康的心脏）。如果有一些模式是基本上重复的，那么下面的线性预测编码将得到显著的数据压缩效果。

主要思想。线性预测编码的基本想法是把数据分成长度为 N 的多个块，这里 N 是一个大的数。

$$\{x_1, \cdots, x_N\}, \{x_{N+1}, \cdots, x_{2N}\}, \{x_{2N+1}, \cdots, x_{3N}\} \cdots$$

先看第一个数据块 $x_1, \cdots, x_N$。选择一个数 p，它应当比 N 小。若 p 选择得比较接近于数据块中重复模式数字的个数，那么线性预测编码方案将能够得到最好的结果（最佳的压缩）。下一步，设法寻找 $a_1, a_2, \cdots, a_p$，在最小平方意义上使得下式最小：

$$e(n) = x_n - \sum_{k=1}^{p} a_k x_{n-k} \qquad p+1 \leqslant n \leqslant N \tag{0.9}$$

一旦做到这一点（细节后面讨论），那么紧接着的做法就是传输 $x_1, \cdots, x_p$ 和 $a_1, \cdots, a_p$。当 $n=p+1$ 时，采用下面的方案，而不是直接传输 $x_{p+1}, x_{p+2}, \cdots$。若 $e(p+1)$ 小于某个特定的阈值，就把 $e(p+1)$ 当做0。在（0.9）式中令 $n=p+1$ 和 $e(p+1)=0$，我们有：

$$x_{p+1} = \sum_{k=1}^{p} a_k x_{p+1-k} = a_1 x_p + a_2 x_{p-1} + a_3 x_{p-2} + \cdots + a_p x_1$$

因为已经传送了数据$x_1, \cdots, x_p$和$a_1, \cdots, a_p$，而且接收端可根据前面的公式重构x_{p+1}，所以没有必要传输 x_{p+1}。如果$e(p+1)$比规定的阈值大，那么需要传送 x_{p+1} [或等价于 $e(p+1)$]。

一旦接收端重构（或接收）了 x_{p+1}，(0.9）式中的 n 变为 $p+2$。若$e(p+2)$ 比规定的阈值小，那么不需要传输 x_{p+2}，接收端能够通过在 (0.9）式中令$e(p+2)=0$ 来重构 x_{p+2}：

$$x_{p+2} = a_1 x_{p+1} + \cdots + a_p x_2$$

接收机可通过相似的方式，重构信号的其余部分 $x_{p+3}, \cdots, x_N$。

我们希望的是，若a_i已经选择为使得$\{e(p+1), \cdots, e(N)\}$在最小平方意义上最小，那么大部分$|e(n)|$小于指定阈值，所以大部分x_n可以在接收端重构，实际上并不需要传输。那么结果就是，不需要传输N组数据（即$x_1, \cdots, x_N$），仅仅需要传输 $2p$ 组数据（即$x_1, \cdots, x_p$和$a_1, \cdots, a_p$）和那些$|e(n)|$比指定阈值大的那些x_n的值（希望很少）。因为 $2p$ 通常比N小许多，所以可以得到显著的数据压缩效果。数据的其他块也可以按类似的方式处理，只不过 p 值可能会不同。

最小二乘的目的。为了找到系数$a_1, \cdots, a_p$，我们利用定理 0.35。把方程 (0.9）对于$n = p+1, \cdots, N$ 写成矩阵形式：

$$E = Y - ZV$$

这里

$$E = \begin{pmatrix} e(p+1) \\ \vdots \\ e(N) \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} x_{p+1} \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \quad Z = \begin{pmatrix} x_p & x_{p-1} & \cdots & x_1 \\ x_{p+1} & x_p & \cdots & x_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ x_{N-1} & x_{N-2} & \cdots & x_{N-p} \end{pmatrix}$$

和

$$V = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix}$$

我们希望选择$V = (a_1, \cdots, a_p)^T$ 使得 $\|E\|$尽可能小，或者换句话说，使得ZV尽可能地接近于Y。从定理 0.35 可知，$V = (a_1, \cdots, a_p)^T$ 可以通过解下列（实的）矩阵方

程得到：

$$Z^TY = Z^TZV$$

详细地写该方程后，该方程变为：

$$\begin{pmatrix} \langle Z_p, Y\rangle \\ \vdots \\ \langle Z_1, Y\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ldots Z_p^T \ldots \\ \vdots \\ \ldots Z_1^T \ldots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ Z_p & \ldots & Z_1 \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} \quad (0.10)$$

这里，以 $Z_p, \cdots, Z_1$ 标示出了 Z 的各列（逆序）。在 Z_i^T 两边的水平点表示这些项是行矢量。同样，在 Z_i 上下的垂直点表示这些项是列矢量。

方程（0.10）是一个关于 $a_1, \cdots, a_p$ 的 $p \times p$ 的系统方程，用 Z 矢量（也就是原始信号点 x）通过高斯消去，可以求解。

线性预测编码小结

线性预测编码包括如下过程：

1. 发送端把数据分割成块

$$\{x_1, \cdots, x_N\}, \{x_{N+1}, \cdots, x_{2N}\}, \{x_{2N+1}, \cdots, x_{3N}\} \cdots$$

   这里的每个块有些接近重复的模式。然后选择 p 使其接近于第1个重复模式块的长度。

2. 对于 $1 \leqslant i \leqslant p$，形成矢量：

$$Z_i = \begin{pmatrix} x_i \\ \vdots \\ x_{N+i-p-1} \end{pmatrix}$$

3. 发送端用系数 $a_1, \cdots, a_p$ 求解系统方程(0.10)，然后发送 $a_1, \cdots, a_p$ 和 $x_1, \cdots, x_p$。
4. 接收端利用下面的公式对 $x_{p+1}, \cdots, x_N$（按此顺序）进行重构：
   对于最小平方误差 $e(n)$ 比某个指定阈值要小的那些 x_n，

$$x_n = a_1x_{n-1} + \cdots + a_px_{n-p} \quad (p+1 \leqslant n \leqslant N)$$

   如果 $e(n)$ 比这个阈值值大，那么发送端就需要发送 x_n。

当然，发送端为了解前面的方程从而求得 $a_1, \cdots, a_p$，接收端为了重构 x_n，有大量工作要做。有人可能有疑问，是否这个工作量比传输所有 x_i 的工作量还要大。但是不要忘记：求解 a_i 和重构 x_n 的工作是在发送端和接收端利用每秒可执行百万次或

百亿次运算的计算机来做的，而传输线每秒仅仅能传输数千比特的数据。所以我们的目的是最大可能地转移困难，从相对较慢的传输数据过程转移到位于发送端或接收端的执行速度飞快的计算机的处理过程上。

0.8 习题

1. 对于$Z=(Z_1,\cdots,Z_n)$, $W=(W_1,\cdots,W_n)\in C^n$，验证函数

$$\langle Z,W\rangle=\sum_{j=1}^{n}Z_j\overline{W_j}$$

定义了一个C^n上的内积（即满足定义 0.1）。

2. 验证例 0.2 和例 0.3 中所定义的函数$\langle,\rangle$是一个内积。
3. 对于$V=(v_1,v_2)$和$W=(w_1,w_2)\in C^2$，定义$\langle V,W\rangle$如下：

$$\langle V,W\rangle=(\overline{w_1},\overline{w_2})\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$$

试证明，对于所有满足$v_1+2v_2=0$的矢量$V=\langle v_1,v_2\rangle$，有$\langle V,V\rangle=0$。上面的$\langle,\rangle$定义了一个内积吗？

4. 证明$L^2[a,b]$内积满足下列性质：
   （1）L^2内积是共轭对称的（即$\langle f,g\rangle=\overline{\langle g,f\rangle}$）、齐次的和双线性的（如定义 0.1 中所列出的性质）。
   （2）证明L^2内积在定义于$[a,b]$内的连续函数空间上满足正性，根据下面的步骤进行证明：
   - 首先要证明的是，若$\int_a^b|f(t)|^2\,dt=0$，则对于所有的$a\leqslant t\leqslant b$，有$f(t)=0$。
   - 用反证法，假设$|f(t_0)|>0$，利用连续的定义证明，在区间$[t_0-\delta,t_0+\delta]$上有$|f(t)|>|f(t_0)|/2$。
   - 然后证明

$$\int_a^b|f(t)|^2\,dt\geqslant\frac{|f(t_0)|^2}{4}[2\delta]>0$$

   与假设$\int_a^b|f(t)|^2\,dt=0$矛盾。

5. 证明$\langle x,y\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}x_n\overline{y_n}$是$l^2$上的一个内积。
6. 对$n>0$，令：

$$f_n(t)=\begin{cases}1, & 0\leqslant t\leqslant 1/n\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

证明在$L^2[0,1]$上有$f_n\to 0$，证明在$[0,1]$上f_n不是一致收敛于0的。

7. 对$n>0$，令：

$$f_n(t)=\begin{cases}\sqrt{n} & 0\leqslant t\leqslant 1/n^2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

证明在$L^2[0,1]$上有$f_n\to 0$，但是随$n\to\infty$，有$f_n(0)\to\infty$。

8. 对于无穷区间，如$[0,\infty)$，定理0.10是否成立?

9. 计算由矢量(1,−2,1)张成的R^3空间的正交补。

10. 若对$0\leqslant t\leqslant 1$，有$f(t)=1$。证明在$L^2[0,1]$中f的正交补是均值为 0 的所有函数集合。

11. 若可微函数f与在$L^2[0,\pi]$上的$\cos(t)$正交，证明f'与在$L^2[0,\pi]$上的$\sin(t)$正交。提示：利用分部积分。

12. 利用Gram-Schmidt正交化方法，求由$1,x,x^2,x^3$张成的$L^2[0,1]$子空间的标准正交基。

13. 求函数$\cos x$在由$1,x,x^2,x^3$张成的$L^2[0,1]$空间上的投影。

14. 求函数$f(x)=x^2$在由

$$\left\{1,\frac{\sin(jx)}{\sqrt{\pi}},\frac{\cos(jx)}{\sqrt{\pi}};\ j=1,\cdots,n\right\}$$

张成的空间$V_n\subset L^2[-\pi,\pi]$上的$L^2[-\pi,\pi]$正交投影，其中$n=1$。当$n=2$和$n=3$时重复以上问题。利用符号计算语言画出f和这些投影的图像。对$g(x)=x^3$重做以上问题。

15. 求函数$f(x)=x$在由$\phi(x),\psi(x),\psi(2x)\psi(2x-1)\in L^2[0,1]$张成的空间上的投影，其中：

$$\phi(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\qquad \psi(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x<1/2\\ -1, & 1/2\leqslant x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

16. 令$D=\{(x,y)\in R^2;\ x^2+y^2\leqslant 1\}$，且

$$L^2(D)=\left\{f:D\to C;\ \iint_D |f(x,y)|^2\,dx\,dy<\infty\right\}。$$

定义$L^2(D)$上的内积为

$$\langle f, g\rangle = \iint_D f(x,y)\overline{g(x,y)}\,dx\,dy$$

令 $\phi_n(x,y) = (x+iy)^n$，$n = 0,1,2,\cdots$，证明这个函数集合在 $L^2(D)$ 上是正交的，并求 $\|\phi_n\|$。提示：用极坐标。

17. 对内积空间 V 中的任意矢量 v，若存在矢量 u_0 和 u_1 满足 $\langle u_0, v\rangle = \langle u_1, v\rangle$，证明 $u_0 = u_1$。提示：令 $v = u_0 - u_1$。
18. 假设 A 为 $n\times n$ 阶的复矩阵，证明以下陈述等价：
    (a) A 的各行形成 C^n 的一组标准正交基。
    (b) $AA^* = I$（单位矩阵）。
    (c) 对所有的 $x \in C^n$，有 $\|Ax\| = \|x\|$。
19. 假设 $K(x,y)$ 是一个连续函数，且在 $R\times R$ 上的一个有界集外为零。定义 $T: L^2(R)\to L^2(R)$ 为：

$$T(f)(x) = \int_{y\in R} f(y)K(x,y)\,dy$$

证明 $T^*g(x) = \int_{y\in R}\overline{K(y,x)}g(y)\,dy$。注意同伴随矩阵 $(A^*_{ij} = \overline{A}_{ji})$ 的比较。

20. 设 $A: V \to W$ 是两个内积空间之间的线性映射，证明 $\mathrm{Ker}(A^*) = (\mathrm{Range}\, A)^\perp$。注意：Ker代表核，$\mathrm{Ker}(A^*)$ 就是 W 中能由 A^* 映射为 0 的所有矢量集合①。
21. 证明下面的定理（Fredholm选择定理）：设 $A: V \to W$ 是两个内积空间之间的线性映射，令 b 是 W 中任一元素，则有：
    - 存在 $x\in V$，满足 $Ax = b$，或者
    - 存在 $w\in W$，满足 $A^*w = 0$ 且 $\langle b, w\rangle_W \neq 0$。
22. 假设 V_0 为内积空间 V 的有限维子空间，证明 $V_0 = ((V_0)^\perp)^\perp$。提示：包含关系 $\subset$ 很容易证明。对于关系 $\supset$，对任意的 $w \in ((V_0)^\perp)^\perp$，然后由定理 0.25 可以将 w 分解为 V_0 和 $V_0^\perp$ 上的两个分量，最后证明属于 $V_0^\perp$ 的分量等于 0。
23. 证明一组标准正交矢量是线性独立的。
24. 验证定理 0.34 中所给出的 m 和 b 的公式。
25. 证明定理 0.35 中的惟一性部分。提示：参见定理 0.34 中惟一性部分的证明。
26. 根据以下的步骤，给出定理 0.34 的另一种证明（利用微积分学的知识）：
    (a) 证明最小二乘问题等价于寻找使下面误差最小的 m 和 b：

$$E(m,b) = \sum_{i=1}^{N} |mx_i + b - y_i|^2$$

---

① Range 表示值域——译者注。

（b）由微积分学的知识，证明最小值满足下式：

$$\frac{\partial E}{\partial m} = \frac{\partial E}{\partial b} = 0$$

（c）解上面两个方程，求得m和b。

27. 求下列数据的最佳的最小二乘拟合直线：

x	0	1	3	4
y	0	8	8	20

28. 仍然利用上题中的数据，求其最佳的最小二乘拟合抛物线。

29. 本题最好利用MATLAB来做，目的是利用线性预测编码对数字串进行压缩。选定$X = (x_1, \cdots, x_N)$，其中的x_j是周期为p、长为N的序列。例如，$x_j = \sin(j\pi/3)$，$1 \leqslant j \leqslant N = 60$就是一个$p = 6$的周期序列。对其进行线性预测编码，计算$a_1, \cdots, a_p$和余差$E = Y - ZV$。如果计算是正确的，则这个余差理论上应该为0（尽管利用计算机来求解会引入小的舍入误差）。下面用一个小的随机序列对X进行加扰[在MATLAB中，可通过把X加上rand(1,60)来实现]，对得到的新序列再次进行线性预测编码，观察余差E中有多少项是不显著的（即小于0.1）。自己构造一个X序列，按上述步骤再做一遍。

第 1 章 傅里叶级数

1.1 引言

在本章中，我们将考察定义在$-\pi \leqslant x \leqslant \pi$上的函数$f(x)$的三角函数展开。三角函数展开是形如

$$a_0 + \sum_k a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \tag{1.1}$$

的和式，这里的和可以是有限和或无限和。我们为什么会关心以这种方式来表示某个函数呢？正如后面的章节所述，答案将随着我们所关注的应用领域的不同而不同。

1.1.1 历史回顾

三角函数展开起源于 18 世纪，同简谐振动和其他类似的物理现象的研究有关。三角函数展开成为关于此类问题通解的争论的一部分，但那时还没有人对它进行过任何系统的研究。1808 年，傅里叶完成了著名的热力学论文集的第一版，即“热的分析理论”，但直到 1822 年才得以出版。在该著作中，傅里叶详细地研究了三角级数，并利用三角级数解决了许多热传导问题。

傅里叶当时的工作饱受争议，部分原因在于他的结论并无确凿依据，并且人们还认为他夸大了结论的适用范围，但最主要的原因是他的观点对于当时的数学家来说还很陌生。例如，在 19 世纪早期，人们认为函数可以表示为包含已知项的任意形式，如x的幂函数、指数函数和三角函数等。函数更抽象的定义[例如，函数即是某个规则，该规则决定了将某个集合（称为定义域）中的数映射为另一个集合（称为值域）中的数]晚些时候才出现。19 世纪的数学家们试图回答下面的问题：假设平面上有一条曲线，而且每条垂直线与该曲线最多只有一个交点，那么描述该曲线的函数可以展开成x的幂函数、指数函数和三角函数吗？事实上，数学家们已经证明了，形如（1.1）式所示的三角函数的和式就足以表示绝大多数曲线（x的幂函数、指数函数和其他形式的数学表达式都没有必要）。我们将在定理 1.22 中证明这一结果。

Riemann 积分和 Lebesgue 积分均起源于对傅里叶级数的研究。傅里叶级数（以及相应的傅里叶变换）的应用涵盖了概率与统计、信号处理和量子力学等学科。从

傅里叶最初的工作至今，已经过去了近两个世纪，以他的名字命名的傅里叶级数在实践和理论上仍很重要，仍然是目前研究的主题。如需要更详细的历史回顾和更深入的参考资料，可参阅 John J. Benedetto 的著作[1]。

1.1.2 信号分析

有许多实际的需求要求我们将函数展开为三角函数和式的形式。若$f(t)$为一信号（例如，时变电压或是乐器发出的声音），那么分解f所得到的三角函数和式就能用来描述其各个频率分量。这里，不用x而是用t表示独立变量（代表时间）。一个正弦波，例如$\sin(kt)$，它的周期为$2\pi/k$，频率为k（即在区间$0 \leqslant t \leqslant 2\pi$内振动$k$次）。信号

$$2\sin(t) - 50\sin(3t) + 10\sin(200t)$$

所包含的频率分量，每2π周期分别振动1次、3次和200次。根据系数的大小，振动频率为3的分量要比其他的占优势。

信号分析中常见的工作之一是消除高频噪声。其中的一种方法就是首先将函数f表示为三角函数的和式：

$$f(t) = a_0 + \sum_k a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)$$

然后令高频系数（即k值大的那些a_k和b_k）等于零即可。

信号分析中常见的工作之二是数据压缩，其目标是以传输最少数据的方式发送信号。其中的一种方法是首先将信号f用三角函数展开式表示，然后只发送比给定阈值大（绝对值）的那些系数a_k和b_k，较小的系数和对f没有实质性贡献的系数可以舍去。因为可以证明（见 Riemann-Lebesgue 引理和定理 1.21），当$k \to \infty$时，a_k和b_k均收敛于0，所以不会出现无限多个系数都很大的问题。

1.1.3 偏微分方程

函数展开成三角函数的和式形式，还起源于对偏微分方程的研究。尽管偏微分方程不是本书关注的主题，但我们仍要提到一个简单却很重要的例子。考虑热力学方程：

$$\begin{array}{ll} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) & t > 0,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi \\ u(x,0) = f(x) & 0 \leqslant x \leqslant \pi \\ u(0,t) = A & u(\pi,t) = B \end{array}$$

该微分方程的解$u(x,t)$表示在长为π的圆棍上，t时刻在位置x处的温度，其初始

温度（即$t=0$时）由$f(x)$给出，而端点处（即$x=0$和$x=\pi$）的温度分别为A和B。我们将计算$A=0$和$B=0$时，该微分方程的解。f的三角级数展开对于求解将起到至关重要的作用。

变量分离。利用变量分离的方法解该热力学方程。该方法假设解的形式为：

$$u(x,t)=X(x)T(t)$$

这里，$T(t)$为$t\geqslant 0$的函数，$X(x)$为x，$0\leqslant x\leqslant\pi$的函数。将u的这一表示形式代入微分方程$u_t=u_{xx}$，得到：

$$X(x)T'(t)=X''(x)T(t) \text{ 或 } \frac{T'(t)}{T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}$$

等式左边只与t有关，而等式右边只与x有关。对于所有的x和t，只有当两个函数都为常数时才相等（因为x和t是独立的变量）。由此可以得到下面两个方程：

$$\frac{T'(t)}{T(t)}=c \qquad \frac{X''(x)}{X(x)}=c$$

这里的c为常数。由方程$T'=cT$，可得$T(t)=Ce^{ct}$，C为适当的常数。从物理角度考虑，常数c必须为负值[否则当$t\to\infty$时，$|T(t)|$以及温度$|u(x,t)|$将趋于无穷大]。所以不妨把c表示为$c=-\lambda^2<0$，得到$T(t)=Ce^{-\lambda^2 t}$。X的微分方程变为：

$$X''(x)+\lambda^2X(x)=0,\ 0\leqslant x\leqslant\pi, \qquad X(0)=0,\ X(\pi)=0$$

由于假设温度$u(x,t)=X(x)T(t)$在$x=0$，π时等于0，因此边界条件为$X(0)=0=X(\pi)$。上述微分方程的解为：

$$X(x)=a\cos(\lambda x)+b\sin(\lambda x)$$

边界条件$X(0)=0$意味着常数a必须为0；边界条件$0=X(\pi)=b\sin(\lambda\pi)$意味着$\lambda$必须为一整数，记为$k$。注意，我们并不想令$b$也为0，这是因为如果$a$和$b$都为0，那么函数$X$以及温度$u$也都将为0。不妨设圆棍的初始温度$f(x)$为0，这样的假设是有意义的。

到此，已经证明了λ的惟一取值为一整数k，相应的解为$X_k(x)=b_k\sin(kx)$和$T_k(t)=e^{-k^2t}$。形如下式的每个函数

$$u_k(x,t)=X_k(x)T_k(t)=b_ke^{-k^2t}\sin(kx)$$

均是该热力学方程满足边界条件$u(0,t)=u(\pi,t)=0$的一个解。惟一没有满足的是初始条件$u(x,0)=f(x)$，对此我们可以考虑u_k的和式：

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t) \tag{1.2}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-k^2 t} \sin(kx) \tag{1.3}$$

令$u(x,t=0)=f(x)$，可得等式：

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx) \tag{1.4}$$

（1.4）式称为f的傅里叶正弦展开。在随后的章节中，将讨论如何得到该展开式（即怎样得到b_k）。一旦得到上述展开形式，就可以将傅里叶系数（b_k）代入（1.3）式中，从而得到热力学方程的完整解。

因此，研究将函数展开成正弦和余弦函数的形式，不论从历史的角度，还是对于解决信号分析和偏微分方程中的实际问题，都是非常重要的。

1.2 傅里叶级数的计算

1.2.1 在区间$-\pi \leqslant x \leqslant \pi$上

在本节中，我们要计算傅里叶级数

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

中的系数a_k和b_k。为此，需要下列关于三角函数正交性的结论。

定理 1.1 下列积分关系式成立：

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(kx)\,dx = \begin{cases} 1 & n=k\geqslant 1 \\ 2 & n=k=0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \tag{1.5}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(kx)\,dx = \begin{cases} 1 & n=k\geqslant 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \tag{1.6}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\sin(kx)\,dx = 0 \qquad \text{对于所有整数} \tag{1.7}$$

该定理可以等价为集合

$$\left\{\ldots, \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin(x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(2x)}{\sqrt{\pi}}, \ldots\right\} \tag{1.8}$$

是$L^2([-\pi,\pi])$上的正交函数系。

证明 （1.5）式和（1.6）式可由下列恒等式得到：

$$\cos((n+k)x) = \cos nx \cos kx - \sin nx \sin kx \tag{1.9}$$

$$\cos((n-k)x) = \cos nx \cos kx + \sin nx \sin kx \tag{1.10}$$

将上述两个恒等式相加，然后积分可得：

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx \, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos((n+k)x + \cos((n-k)x)) \, dx$$

上式右边的积分值容易求得。如果$n \neq k$，那么：

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx \, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(n+k)x}{n+k} + \frac{\sin(n-k)x}{n-k}\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

如果$n = k \geqslant 1$，那么：

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} (1/2)(1+\cos 2nx) \, dx = \pi$$

如果$n = k = 0$，那么（1.5）式简化为$(1/\pi)\int_{-\pi}^{\pi} 1 \, dx = 2$。这就完成了对（1.5）式的证明。

把（1.9）式和（1.10）式相减，然后积分可得（1.6）式。由于$k > 0$时，$\cos(nx)\sin(kx)$为奇函数（见引理 1.7），因此可得（1.7）式。

下面利用（1.5）式至（1.7）式给出的正交关系式计算傅里叶系数。由下式开始：

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \tag{1.11}$$

要得到a_n，须在等式两边同乘以$(\cos nx)/\pi$，然后积分可得：

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right) \cos nx \, dx$$

由（1.5）式至（1.7）式可知，等式右边只有$n = k$时的余弦项，因此得到：

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \, dx = a_n \quad n \geqslant 1$$

类似地，（1.11）式两边同乘以$\sin nx$，然后积分可得：

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx \, dx = b_n \quad n \geqslant 1$$

作为特例，需要计算系数a_0，只要对（1.11）式两边进行积分，就可得到：

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\right)dx$$

因为每个sin和cos项的积分都等于0，因此有：

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} a_0\,dx = a_0$$

以上的讨论可总结为下述定理。

定理 1.2 若$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)$，那么有：

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \tag{1.12}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \tag{1.13}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \tag{1.14}$$

a_n和b_n称为函数f的傅里叶系数。

注释。证明定理 1.2 的关键在于（1.8）式中的各项是正交的。定理 0.21 保证了傅里叶系数a_n和b_n是将函数f正交投影到分别由$\cos nx$和$\sin nx$张成的空间而得到的。事实上，我们注意到，如定理 0.21 所示，a_n和b_n是（只差一个系数$1/\pi$）$f(x)$分别与$\sin nx$和$\cos nx$的L^2内积，因而，定理 1.2 的证明过程与定理 0.21 的类似，只不过是在一特定的L^2内积下进行的，这里的正交系（即e_j）在（1.8）式中给出。

要切记的是，我们只证明了若f可以表示为三角函数的和式，则系数a_n和b_n便可由上述公式给出。以后将证明（定理 1.22），区间$[-\pi,\pi]$上的绝大多数函数都可以表示为三角函数和式的形式。注意，定理 1.2 也表明了傅里叶系数的惟一性。

1.2.2 其他区间

长度为2π的区间。定理 1.2 关注的区间是$[-\pi,\pi]$。在本节将证明，对于长度为2π的任意区间，定理 1.2 亦适用。为此，需要以下引理。

引理 1.3 假设F是任意周期为2π的函数，c为任意实数，则有：

$$\int_{-\pi+c}^{\pi+c} F(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} F(x)\,dx \tag{1.15}$$

证明 该引理的简单证明如图 1.1 所示。如果$F \geqslant 0$，那么（1.15）式的左边表示

曲线F下从$x=-\pi+c$至$x=\pi+c$的面积，而（1.15）式的右边表示曲线F下从$x=-\pi$到$x=\pi$的面积。由于F的周期为2π，因此，图 1.1 中两阴影部分的面积相等。把左边的阴影部分转移到右边的阴影部分，这一过程等价为把（1.15）式右边的积分变为左边的积分。

该引理的解析证明见习题 21。

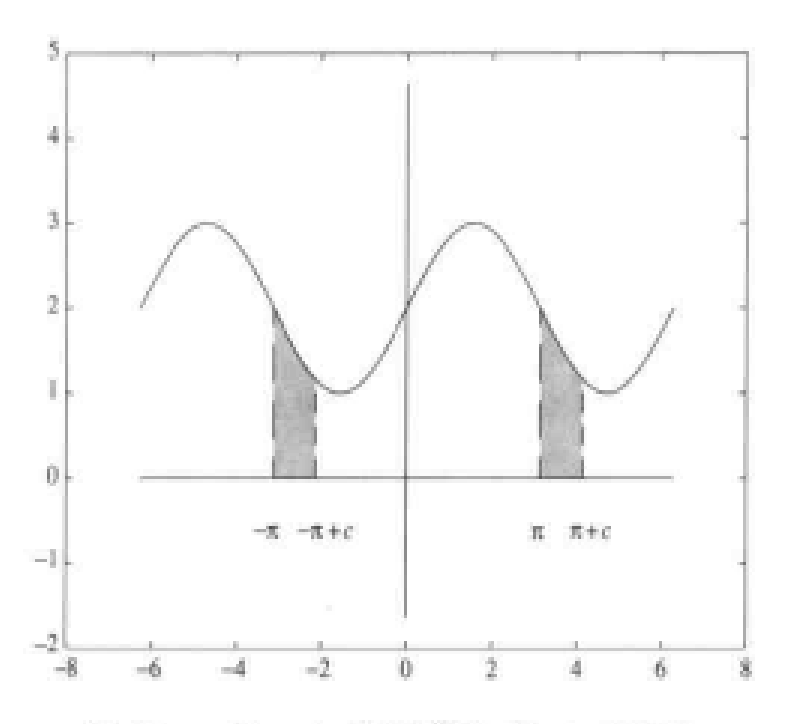


图 1.1　$-\pi$至$-\pi+c$的面积等于π至$\pi+c$的面积

把该引理应用于$F(x)=f(x)\cos nx$或$F(x)=f(x)\sin nx$，可见定理 1.2 中的积分公式对于形如$[-\pi+c,\pi+c]$的任意区间均适用。

任意长度的区间。我们还需考虑形如$-a\leqslant x\leqslant a$，长度为$2a$的区间。其基本的构筑块为$\cos(n\pi x/a)$和$\sin(n\pi x/a)$，周期为$2a$。注意，当$a=\pi$时，函数简化为$\cos nx$和$\sin nx$，这就形成如定理 1.2 中所示的、区间$[-\pi,\pi]$上傅里叶级数的构筑块。

利用下列比例关系，可以将计算区间$[-\pi,\pi]$上的傅里叶系数的积分公式转换到$[-a,a]$上的积分公式。假设F是定义在区间$-\pi\leqslant x\leqslant\pi$上的函数。做变量替换$x=t\pi/a$，$dx=\pi dt/a$，可以得到如下公式：

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\,dx=\frac{1}{a}\int_{-a}^{a}F(\frac{\pi t}{a})\,dt$$

利用这种变量替换，可以从定理 1.2 推导出如下定理（见习题 13）。

定理 1.4　如果在区间$-a\leqslant x\leqslant a$内$f(x)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos(k\pi x/a)+b_k\sin(k\pi x/a)$，那么有：

$$a_0 = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} f(t)\,dt$$

$$a_n = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(t)\cos(n\pi t/a)\,dt$$

$$b_n = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(t)\sin(n\pi t/a)\,dt$$

例 1.5

令

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

下面计算f在区间$-2 \leqslant x \leqslant 2$上的傅里叶级数。由定理 1.4 可知，对于$a = 2$，傅里叶余弦系数为：

$$a_0 = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} f(t)\,dt = \frac{1}{4}\int_{0}^{1} 1\,dt = \frac{1}{4}$$

$n \geqslant 1$时，

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(t)\cos n\pi t/2\,dt = \frac{1}{2}\int_{0}^{1} \cos n\pi t/2\,dt = \frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi}$$

当n为偶数时，a_n=0；当$n = 2k+1$为奇数时，$\sin(n\pi/2) = (-1)^k$。所以有：

$$a_n = \frac{(-1)^k}{(2k+1)\pi}, \quad (n = 2k+1)$$

类似地，

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(t)\sin n\pi t/2\,dt = \frac{1}{2}\int_{0}^{1} \sin n\pi t/2\,dt = \frac{-1}{n\pi}(\cos n\pi/2 - 1)$$

$$\begin{cases} \text{当 } n = 4j,\ b_n = 0 \text{ 时} \\ \text{当 } n = 4j+1,\ b_n = \dfrac{1}{(4j+1)\pi} \text{ 时} \\ \text{当 } n = 4j+2,\ b_n = \dfrac{1}{(2j+1)\pi} \text{ 时} \\ \text{当 } n = 4j+3,\ b_n = \dfrac{1}{(4j+3)\pi} \text{ 时} \end{cases}$$

因而，f的傅里叶级数为：

$$F(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x/2) + b_n \sin(n\pi x/2)$$

其中，a_n和b_n如前所示。

在随后的章节中，我们将探讨f的傅里叶级数$F(x)$是否与$f(x)$自身相等这一问题。

1.2.3 余弦和正弦展开

偶函数与奇函数

定义 1.6 令$f: R \to R$是一个函数，若$f(-x) = f(x)$，则f为偶函数；若$f(-x) = -f(x)$，则f为奇函数。

偶函数的图形关于y轴对称，如图 1.2 所示。具体的例子包括$f(x) = x^2$（或任意偶次幂）以及$f(x) = \cos x$。奇函数的图形关于原点对称，如图 1.3 所示。具体的例子包括$f(x) = x^3$（或任意奇次幂）以及$f(x) = \sin x$。

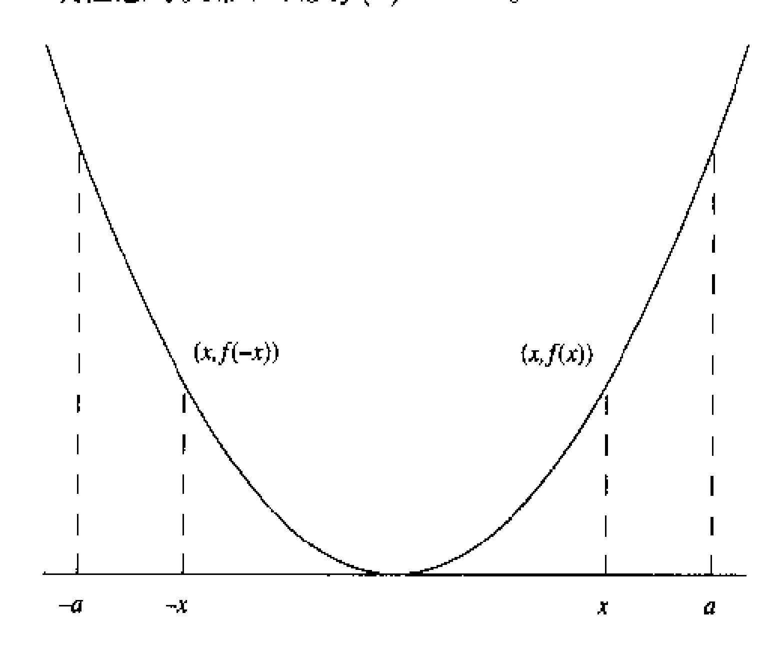
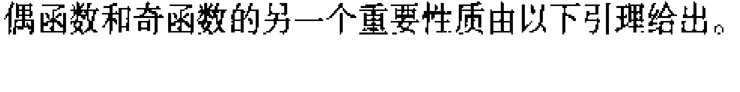


图 1.2　偶函数$f(-x) = f(x)$

由定义可得如下性质：

偶函数 × 偶函数 = 偶函数
偶函数 × 奇函数 = 奇函数
奇函数 × 奇函数 = 偶函数

例如，如果f为偶函数，g为奇函数，则$g(-x)f(-x) = -g(x)f(x)$，所以 fg 为奇函数。



偶函数和奇函数的另一个重要性质由以下引理给出。

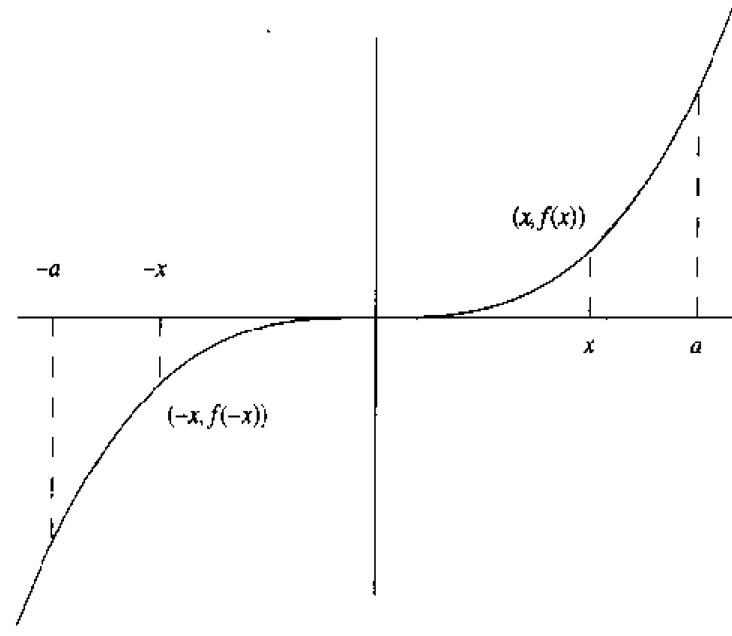


图 1.3 奇函数 $f(-x) = -f(x)$

引理 1.7

- 如果F为偶函数，则有：

$$\int_{-a}^{a} F(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} F(x)\,dx$$

- 如果F为奇函数，则有：

$$\int_{-a}^{a} F(x)\,dx = 0$$

由图 1.2 和图 1.3 很容易就得出该引理。如果F为偶函数，则左半区间$[-a, 0]$内的积分值和右半区间$[0, a]$内的积分值相同。因而，区间$[-a, a]$内的积分值为区间$[0, a]$内的积分值的两倍。如果F为奇函数，则左半区间$[-a, 0]$内的积分值和右半区间$[0, a]$内的积分值抵消，此时，区间$[-a, a]$内的积分值为 0。

如果函数的傅里叶级数只含有余弦项，那么该函数肯定是偶函数（因为余弦函数是偶函数）。同样，如果傅里叶级数只含有正弦项，就肯定为奇函数。反过来也成立，这就是下一条定理的内容。

定理 1.8

- 如果$f(x)$为偶函数，则该函数在区间$[-a, a]$上的傅里叶级数只含有余弦项。也就是说，$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\pi x/a)$，其中：

$$a_0 = \frac{1}{a}\int_0^a f(x)\,dx$$

$$a_k = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\cos(k\pi x/a)\,dx$$

- 如果$f(x)$为奇函数，则该函数的傅里叶级数只含有正弦项。也就是说，$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\pi x/a)$，其中：

$$b_k = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin(k\pi x/a)\,dx$$

证明　该定理可由引理 1.7 及定理 1.2 得出。如果f为偶函数，则$f(x)\cos n\pi x/a$也为偶函数，所以它在区间$[-a,a]$上的积分值等于在区间$[0,a]$内的积分值的两倍。此外，$f(x)\sin n\pi x/a$为奇函数，所以它在区间$[-a,a]$内的积分值为0。第（2）部分可用类似的方法证明。

半区间上的傅里叶余弦级数和正弦级数。设f为定义在区间$[0,a]$上的函数。考虑将f进行奇延拓或偶延拓，就可以将f展开为余弦级数或正弦级数。如果要将f展开为余弦级数，需考虑f的偶延拓：

$$f_e(x) = \begin{cases} f(x) & \text{如果} 0 \leqslant x \leqslant a \\ f(-x) & \text{如果} -a \leqslant x < 0 \end{cases}$$

f_e是定义在$[-a,a]$上的偶函数。因而，其傅里叶展开式只含有余弦项：

$$f_e(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\pi x/a \quad -a \leqslant x \leqslant a \tag{1.16}$$

其中，a_k由定理1.8 给出。由于$0 \leqslant x \leqslant a$时，$f_e(x) = f(x)$，所以定理 1.8 中的积分公式只包含$f(x)$而不包含$f_e(x)$，于是（1.16）式变为：

$$f(x) = a_0 - \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\pi x/a \quad 0 \leqslant x \leqslant a$$

这里，

$$a_0 = \frac{1}{a}\int_0^a f(x)\,dx$$

$$a_k = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\cos(k\pi x/a)\,dx$$

同样，要将f展开为正弦级数，则需考虑f的奇延拓：

$$f_o(x)=\begin{cases} f(x) & 若0\leqslant x\leqslant a \\ -f(-x) & 若-a\leqslant x<0 \end{cases}$$

奇函数$f_o(x)$的傅里叶展开式只含有正弦项。由于$0\leqslant x\leqslant a$时，$f_o(x)=f(x)$，所以可得f的正弦展开：

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\pi x/a \quad 0<x\leqslant a$$

这里的b_k由定理 1.8 给出：

$$b_k=\frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin(k\pi x/a)\,dx$$

下一节的例子将验证上述思想。

1.2.4 例子

令$F(x)$为函数f在区间$[-\pi,\pi]$上的傅里叶级数：

$$\begin{aligned} F(x) &= a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx+b_n\sin nx \\ &= a_0+\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} a_n\cos nx+b_n\sin nx \end{aligned}$$

其中，a_n和b_n是f的傅里叶系数。当$N\to\infty$时，如果上述极限存在，就称傅里叶级数收敛。定理 1.2 和 1.4 只是计算给定函数的傅里叶级数，我们还没有证明该傅里叶级数是否收敛（或收敛于什么）。在f可微这样一个非常宽泛的假设下，我们将在定理 1.22 和 1.28 中证明，下列法则成立：

令f是周期为2π的函数。

（1）如果f在x点处连续，则它的傅里叶级数$F(x)$收敛，且$F(x)=f(x)$。

（2）如果f在x点处不连续，则$F(x)$收敛于f在x点处的左右极限的平均值，即：

$$F(x)=\frac{1}{2}\left(\lim_{t\to x^-}f(t)+\lim_{t\to x^+}f(t)\right)$$

第2 条法则内容包含了第 1 条，这是因为如果f在x点处连续，则f在x点处的左右极限都等于$f(x)$，因此，$F(x)=f(x)$。

定理 1.22 和定理 1.28 的严格表述和证明将在下一节给出。本节将举例说明傅里叶级数的计算过程和傅里叶级数的收敛速度。

例 1.9

考虑函数$f(x) = x$，$-\pi \leqslant x < \pi$。该函数是奇函数，因此只有正弦系数不为 0。傅里叶系数为：

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(kx)\,dx$$

$$= \frac{2(-1)^{k+1}}{k} \qquad \text{（用分部积分）}$$

所以，在区间$[-\pi,\pi]$上的傅里叶级数为：

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{k}\sin(kx)$$

$f(x) = x$不是周期为2π的函数，其周期延拓$\tilde{f}$如图 1.4 所示。根据前述法则可知，在$\tilde{f}(x)$的连续点处，$F(x)$收敛于$\tilde{f}(x)$。在$\tilde{f}$的不连续点处（$x = \cdots -\pi,\ \pi, \cdots$），$F(x)$收敛于$\tilde{f}(x)$左右极限的平均值。例如，$F(\pi) = 0$（因为$\sin k\pi = 0$），此即为$\tilde{f}(x)$在$x = \pi$处的左右极限的平均值。

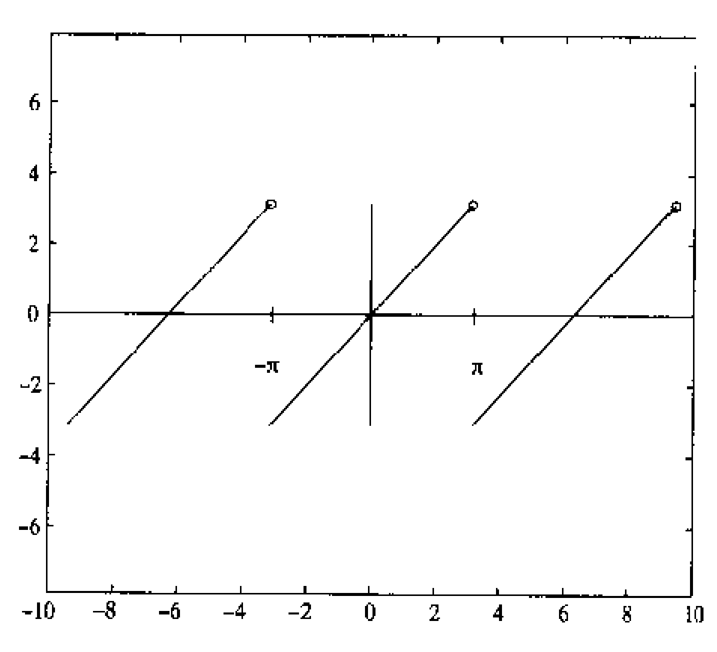


图 1.4 $f(x) = x$以2π为周期的延拓

为观察该傅里叶级数的部分和收敛于$\tilde{f}(x)$的速度，我们以N为变量，对部分和

$$S_N(x) = \sum_{k=1}^{N} \frac{2(-1)^{k+1}}{k}\sin(kx)$$

画图。图 1.5 表示的是

$$S_{10}(x) = \sum_{k=1}^{10} \frac{2(-1)^{k+1}}{k} \sin(kx)$$

和$\tilde{f}(x)$（曲线表示S_{10}）。

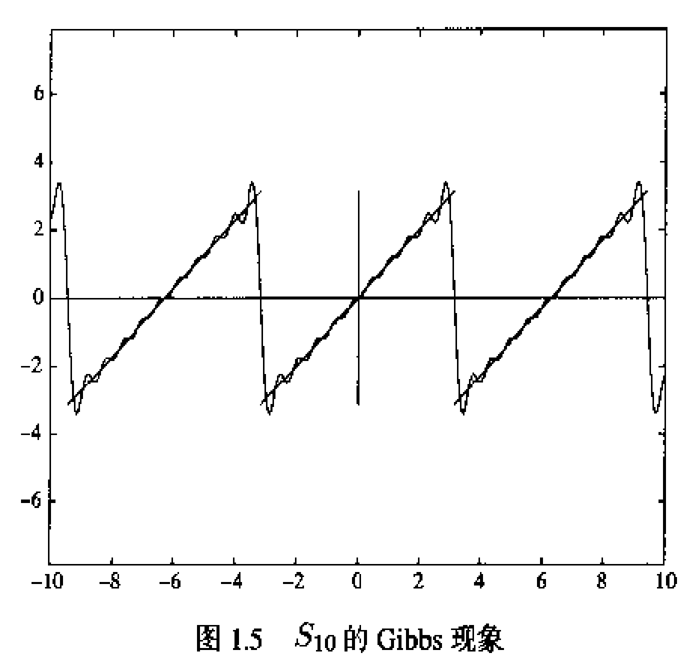


图 1.5 S_{10}的 Gibbs 现象

首先注意到，x离间断点越近，用S_{10}近似$\tilde{f}(x)$的精度越差。例如，在$x=\pi$附近，$S_{10}(x)$的图形必须在很短的间隔内，从$y=-\pi$转变到$y=\pi$，导致在$x=\pi$附近收敛速度变慢。

其次注意到，在$f(x)$不连续点（如$x=\pi$）的前后，傅里叶级数图像上存在尖头信号，这一现象称为 Gibbs 现象。Gibbs 现象有个很有趣的地方，就是不管部分和中有多少项，尖头信号的高度近似不变，但宽度随项数的增加而变窄。图 1.6 表示 S_{50}（傅里叶级数的前 50 项）的 Gibbs 现象。习题 28 将详细解释 Gibbs 现象。

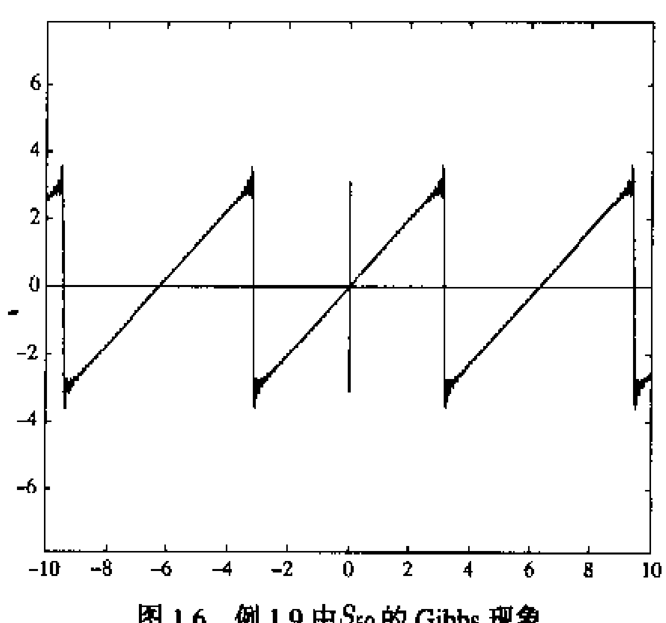


图 1.6 例 1.9 中S_{50}的 Gibbs 现象

例 1.10

考虑如图 1.7 所示的锯齿波。在区间$0 \leqslant x \leqslant \pi$内，函数$f$定义为：

$$f(t) = \begin{cases} x & 0 \leqslant x \leqslant \pi/2 \\ \pi - x & \pi/2 \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$$

然后延拓到区间$-\pi \leqslant x \leqslant 0$从而成为偶函数（见图 1.7）。由于$f$是偶函数，因此只有余弦项不为 0。应用定理 1.8，其傅里叶系数为：

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \frac{\pi}{4} \text{（无需积分）}$$

对于$j > 0$，有：

$$a_j = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(jx)\,dx$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(jx)\,dx + \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\pi - x)\cos(jx)\,dx$$

经过必要的积分运算后，得到：

$$a_j = \frac{4\cos(j\pi/2) - 2\cos(j\pi) - 2}{\pi j^2} \qquad j > 0$$

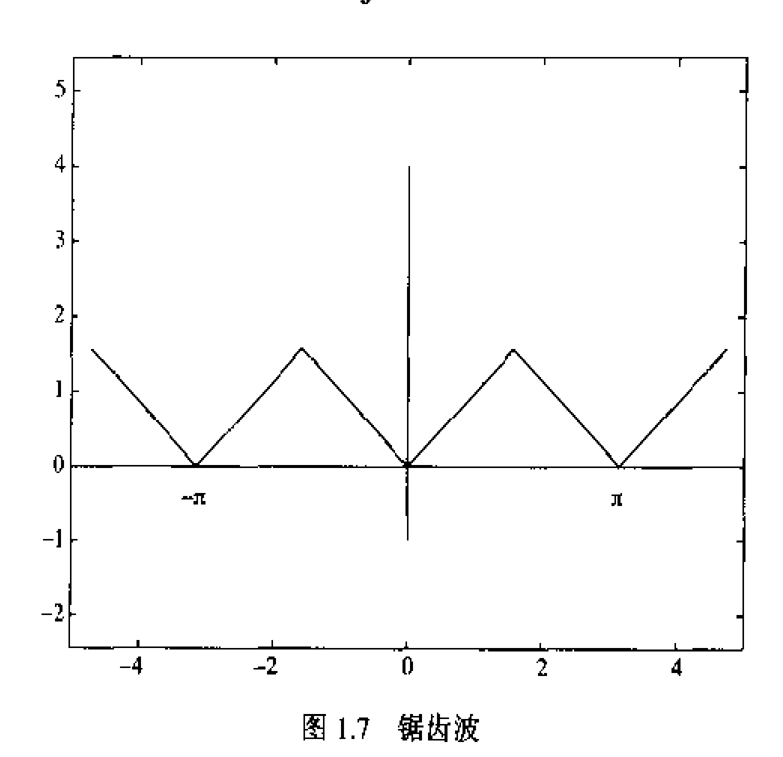


图 1.7　锯齿波

因为只有a_{4k+2}不为 0，所以这些傅里叶系数可简化为：

$$a_{4k+2}=\frac{-2}{\pi(2k+1)^2}$$

所以，锯齿波的傅里叶级数为：

$$F(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos((4k+2)x)$$

锯齿波原本就是连续的且具有周期性，因此，由本节开始时所述的法则可知，对于每一个x，傅里叶级数$F(x)$都等于锯齿波函数$f(x)$。此外，其收敛速度要比例 1.9 中的傅里叶级数快。为了说明它的收敛速度，画出其傅里叶级数的前两项之和：

$$S_2(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{2\cos(2x)}{\pi}$$

如图 1.8 所示。

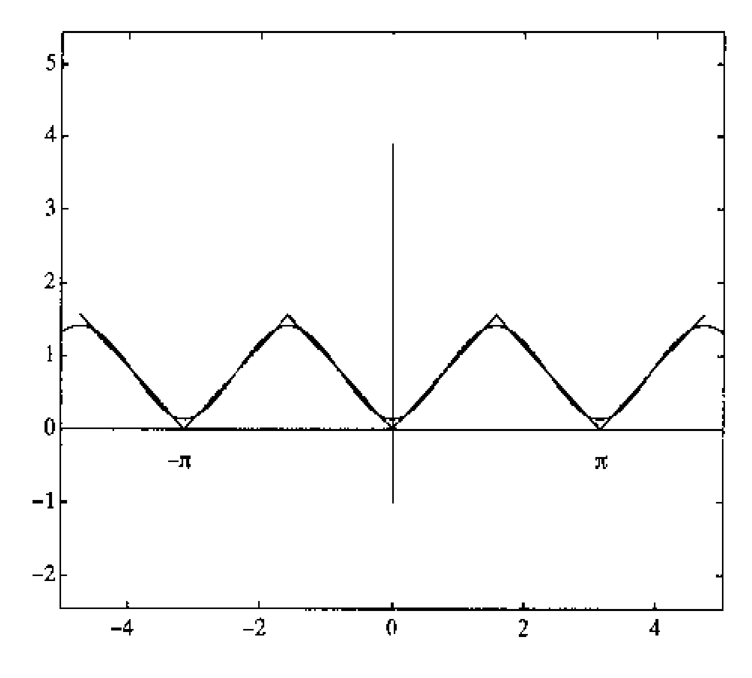


图 1.8 锯齿波傅里叶级数的前两项和

该傅里叶级数仅前两项之和对锯齿波的近似程度，就明显优于前面不连续情况时，傅里叶级数取前 10 项、50 项甚至1000 项的程度。事实上，其傅里叶级数前 10 项之和的图像（见图 1.9）就已经和原函数的图像没什么区别了。

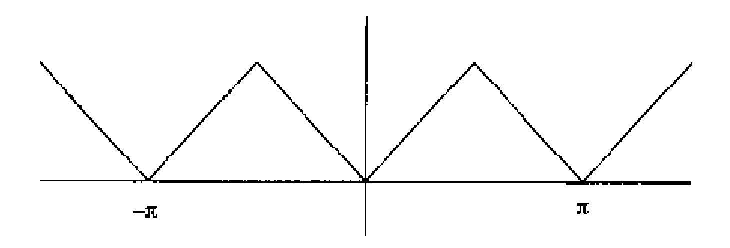


图 1.9 锯齿波傅里叶级数的前 10 项和

例 1.11

令$f(x)=\sin(3x)+\cos(4x)$。由于f已经表示成正弦和余弦的形式，因此不必再计算f的傅里叶级数[即，f的傅里叶级数就是$\sin(3x)+\cos(4x)$]。这个例子说明了一个很重要的事实：傅里叶系数是惟一的（定理 1.2 准确地说明了a_k和b_k应为多少）。经比对可知，$b_3=1$，$a_4=1$，其他的系数均为 0。由惟一性可知，这应当就是利用定理 1.2 中的积分公式计算出的a_k和b_k的值（显然，前者的计算量要小得多）。

例 1.12

令$f(x)=\sin^2(x)$。此例中，f并没有写成正弦函数和余弦函数线性组合的形式，所以需要做些工作。不过，不必通过计算定理 1.2 中的积分来得到a_k和b_k，而是可以利用三角恒等式：

$$\sin^2(x)=\frac{1}{2}(1-\cos(2x))$$

由于等式右边是$\cos(kx)$的线性组合（这里，$a_0=1/2$，$a_2=-1/2$，其余的a_k和b_k都为 0），因此，等式右边就是所要求的傅里叶级数。

例 1.13

为了得到函数$f(x)=x^2+1$在区间$0\leqslant x\leqslant 1$上的正弦傅里叶级数，首先对f进行奇延拓：

$$f_o(x)=\begin{cases} f(x)=x^2+1 & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ -f(-x)=-x^2-1 & -1\leqslant x\leqslant 0 \end{cases}$$

然后利用定理 1.8 计算f_o的傅里叶系数：

$$b_n=2\int_0^1 f(x)\sin(n\pi x)\,dx=2\int_0^1 (x^2+1)\sin(n\pi x)\,dx$$

注意，在计算b_n时，并不需要f在区间$-1\leqslant x\leqslant 0$上的奇延拓。利用分部积分法（两次）可得：

$$b_n=-2\frac{2n^2\pi^2(-1)^n-2(-1)^n+2-n^2\pi^2}{\pi^3n^3}$$

当$n=2k$为偶数时，该式可以简化为：

$$b_{2k}=-\frac{1}{k\pi}$$

当$n=2k-1$为奇数时，

$$b_{2k-1}=2\frac{12k^2\pi^2-12\pi^2k+3\pi^2-4}{\pi^3(2k-1)^3}$$

因而，x^2+1在区间$[0,1]$上的傅里叶正弦级数为：

$$F(x)=\sum_{k=1}^{\infty}-\left(\frac{1}{k\pi}\right)\sin 2k\pi x+2\left(\frac{12k^2\pi^2-12\pi^2k+3\pi^2-4}{\pi^3(2k-1)^3}\right)\sin(2k-1)\pi x \tag{1.17}$$

f_o定义在区间$[-1,1]$上，其周期延拓$\tilde{f}_o$在区间$[-2,2]$上的图像见图1.10。在$\tilde{f}_o$的连续点处，其傅里叶级数$F(x)$收敛于$\tilde{f}_o(x)$。$\tilde{f}_o$在整数点处不连续。根据本节开始所述的法则可知，在整数点处，$F(x)$收敛于0（因为$\tilde{f}_o$左右极限的平均值为0）。这与利用（1.17）式计算得到的F值相一致［因为对任意整数k，$\sin 2k\pi$和$\sin(2k-1)\pi$都为零］。$F(x)$的图像见图1.11。注意，由于$0<x<1$时，$\tilde{f}_o(x)=f(x)$，所以傅里叶正弦级数$F(x)$与函数$f(x)=x^2+1$在区间$0<x<1$上相同。$F(x)$前30项的部分和如图1.12所示。

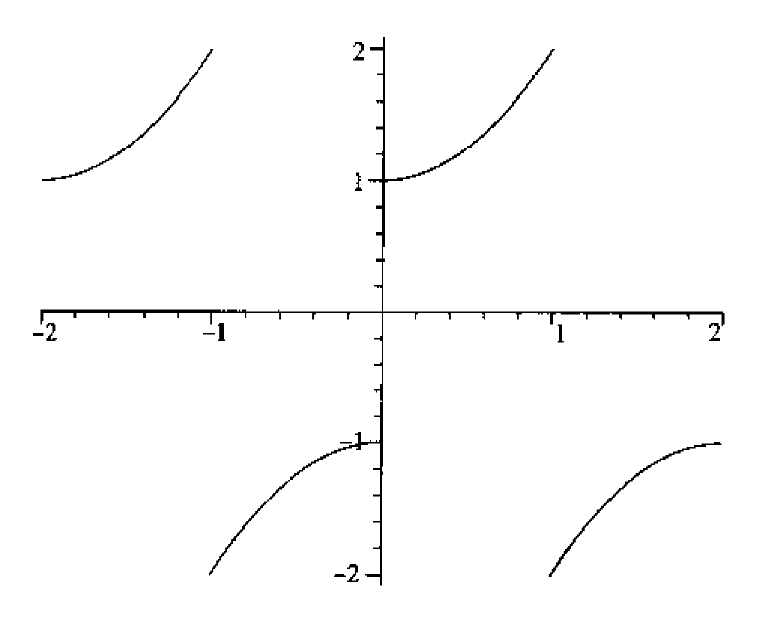


图 1.10 $f(x)=x^2+1$的奇延拓

例 1.14

解热力学方程：

$$\begin{aligned}
&u_t(x,t)=u_{xx}(x,t) && t>0,0\leqslant x\leqslant\pi\\
&u(x,0)=f(x) && 0\leqslant x\leqslant\pi\\
&u(0,t)=0 && u(\pi,t)=0
\end{aligned}$$

其中，$f(x)$是例 1.10 中的锯齿波，即：

$$f(x)=\begin{cases}x & 若\, 0\leqslant x\leqslant \pi/2\\ \pi-x & 若\, \pi/2\leqslant x\leqslant \pi\end{cases}$$

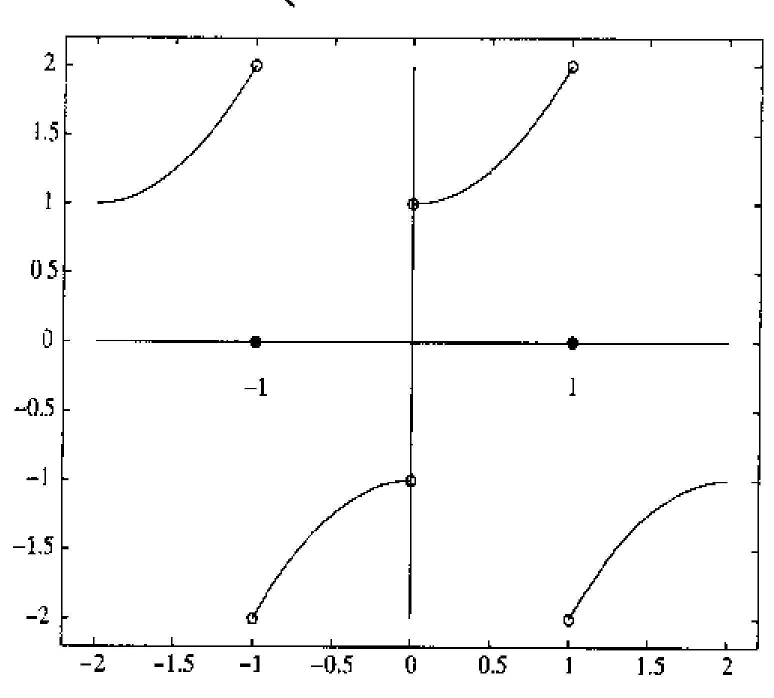


图 1.11　$f(x)=x^2+1$的傅里叶正弦级数F

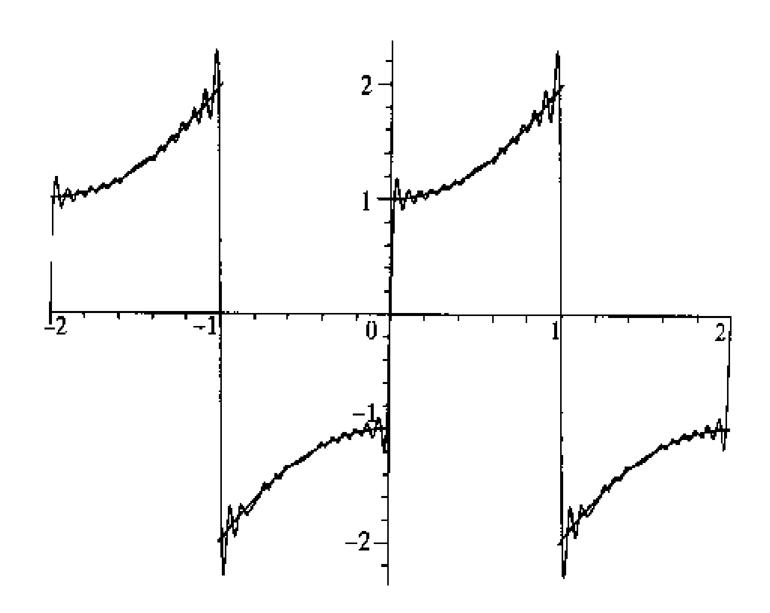


图 1.12　$F(x)$的前 30 项之和

由 1.1.3 节的讨论可知，该问题的解为：

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-k^2 t}\sin(kx) \tag{1.18}$$

令（1.18）式中的$t=0$，利用$u(x,0)=f(x)$，可得：

$$f(x)=u(x,0)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin(kx)$$

因此，b_k必为$f(x)$的傅里叶正弦系数，由定理 1.8 可知：

$$b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(t)\sin(kt)\,dt$$

将f的表达式代入上式，然后积分。由于当k为偶数时，$b_k=0$；当$k=2j+1$为奇数时，有：

$$b_{2j+1}=\frac{4(-1)^j}{\pi(2j+1)^2}$$

将b_k代入（1.18）式，得到最终的解为：

$$u(x,t)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{4(-1)^j}{\pi(2j+1)^2}\sin((2j+1)x)e^{-(2j+1)^2t}$$

1.2.5 傅里叶级数的复数形式

由于复指数e^{inx}，$n\in Z$具有简单的计算性质，因此，在一些复杂的运算中，将傅里叶级数表示为复数形式会更方便些。复指数的定义如下。

定义 1.15 对于任意实数t，复指数为：

$$e^{it}=\cos(t)+i\sin(t)$$

其中，$i=\sqrt{-1}$。

上述定义的原因是，将$x=it$代入e^x的 Taylor 级数展开式中：

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$$

$$\text{令 } x=it: \qquad e^{it}=1+(it)+\frac{(it)^2}{2!}+\frac{(it)^3}{3!}+\frac{(it)^4}{4!}+\cdots$$

归并实数部分和虚数部分，并利用 sin 和 cos 的 Taylor 级数展开式，可得：

$$\begin{aligned}e^{it}&=\left(1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}+\ldots\right)+i\left(t-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}-\ldots\right)\\&=\cos(t)+i\sin(t)\end{aligned}$$

下面的引理将列举复指数的一些性质，这些性质同实指数的有关性质类似，它

们可以由定义以及基本的三角函数恒等式推导而来，留作习题（见习题14）.

引理1.16 对所有t，$s \in R$

（1）$e^{i(t+2\pi)} = e^{it}$

（2）$|e^{it}| = 1$

（3）$\overline{e^{it}} = e^{-it}$

（4）$e^{it}e^{is} = e^{i(t+s)}$

（5）$e^{it}/e^{is} = e^{i(t-s)}$

（6）$\frac{d}{dt}\left\{e^{it}\right\} = ie^{it}$

接下来的定理将证明复指数在$L^2([-\pi,\pi])$上是标准正交的.

定理1.17 函数集

$$\left\{\frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}},\ n = \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\right\}$$

在$L^2([-\pi,\pi])$上是标准正交的.

证明 我们要证明:

$$\langle e^{int}, e^{imt}\rangle_{L^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{int}\,\overline{e^{imt}}\,dt = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

利用引理1.16的第（3）、（4）和（6）条性质，得到:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} e^{int}\overline{e^{imt}}\,dt &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{int}e^{-imt}\,dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)t}\,dt \\ &= \left.\frac{e^{i(n-m)t}}{i(n-m)}\right|_{-\pi}^{\pi} \qquad n \neq m \\ &= 0 \end{aligned}$$

如果$n = m$，那么$e^{int}e^{-int} = 1$，所以$\langle e^{int}, e^{int}\rangle = 2\pi$，证毕.

结合本定理以及定理0.21，可以得到如下所示的傅里叶级数的复数形式。

定理1.18 如果在区间$-\pi \leqslant t \leqslant \pi$上$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{int}$，则:

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,dt$$

例 1.19

考虑函数

$$f(t)=\begin{cases}1 & 若\ 0\leqslant t<\pi\\ -1 & 若\ -\pi\leqslant t<0\end{cases}$$

其第n个复傅里叶系数为：

$$\begin{aligned}\alpha_n&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-int}\,dt\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}e^{-int}\,dt-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}e^{-int}\,dt\\&=-\frac{i(1-\cos(n\pi))}{n\pi}\\&=\begin{cases}\dfrac{-2i}{n\pi} & n\ 为奇数\\ 0 & n\ 为偶数\end{cases}\end{aligned}$$

所以f的复傅里叶级数为：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha_ne^{int}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{-2i}{(2k+1)\pi}e^{i(2k+1)t}$$

傅里叶级数的复数形式也可以在其他区间上表示。

定理 1.20 函数集

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{in\pi t/a},\ n=\cdots-2,-1,0,1,2,\cdots\right\}$$

是$L^2[-a,a]$上的标准正交基。如果$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha_ne^{in\pi t/a}$，则有：

$$\alpha_n=\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}f(t)e^{-in\pi t/a}\,dt$$

傅里叶级数的实数形式和复数形式之间的关系。 如果f是实值函数，那么其傅里叶级数的实数形式可以由复数形式推导得来，反之亦然。为简单起见，仅在区间$-\pi\leqslant t\leqslant\pi$上讨论这一推导过程，但在其他区间上也同样适用。首先，将f的傅里叶级数的复数形式分解为正数指标项和负数指标项：

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{-1} \alpha_n e^{int} + \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{int} \tag{1.19}$$

其中：

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int}\, dt$$

如果f是实值的，则$\alpha_{-n} = \overline{\alpha_n}$，因为：

$$\alpha_{-n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{int}\, dt = \frac{1}{2\pi} \overline{\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int}\, dt} = \overline{\alpha_n}$$

因此，(1.19)式变为：

$$f(t) = \alpha_0 + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{int} \right) + \left(\overline{\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{int}} \right)$$

因为对于任意复数z，有$z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$，所以该式可以写为：

$$f(t) = \alpha_0 + 2\,\mathrm{Re} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{int} \right) \tag{1.20}$$

注意下面的α_n和由定理 1.2 给出的实傅里叶系数a_n与b_n之间的关系：

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt = a_0$$

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int}\, dt \qquad n \geqslant 1 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\cos nt - i \sin nt)\, dt \\ &= \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \end{aligned}$$

利用(1.20)式，可得：

$$\begin{aligned} f(t) &= \alpha_0 + 2\,\mathrm{Re} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{int} \right) \\ &= a_0 + \mathrm{Re} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - ib_n)(\cos nt + i \sin nt) \right) \end{aligned}$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt$$

这就是f的傅里叶级数的实数形式。把以上的推导过程反过来，即可由傅里叶级数的实数形式推导出其傅里叶级数的复数形式。

1.3 傅里叶级数的收敛定理

本节将在对f很宽泛的假设条件下，证明傅里叶级数的收敛性。本节会涉及到一些关于收敛性的基础数学方面的知识。首先从 Riemann-Lebesgue 引理开始，当然该引理本身也非常重要。

1.3.1 Riemann-Lebesgue 引理

由 1.2.4 节的例子可知，随着k变大，傅里叶系数a_k和b_k收敛于 0。正如下面的定理所述，这不是巧合。

定理 1.21 Riemann-Lebesgue 引理。设f是区间$a \leqslant x \leqslant b$上的分段连续函数，则有：

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b f(x)\cos(kx)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_a^b f(x)\sin(kx)\,dx = 0$$

根据定义，分段连续函数只有有限个间断点，这一假设对大多数函数来讲并不苛刻。

定理 1.21 的一个重要推论是，只可能有有限个傅里叶系数的值（绝对值）比给定的某个正数要大，这正是可以进行数据压缩的根本原因。压缩的方法之一是，首先将信号展开为傅里叶级数的形式，然后舍去所有较小的傅里叶系数，只保留（或发送）比给定阈值大的有限个傅里叶系数（习题 31 说明了这一过程）。我们会在离散傅里叶变换和小波等章节中再次提及数据压缩。

证明 在严格证明该定理前，先看一个简单的现象。随着k变大，$\sin(kx)$和$\cos(kx)$的振荡速度要比f的快得多（见图 1.13）。如果k很大，那么在$\sin(kx)$或$\cos(kx)$的 1 个周期内，$f(x)$近似为常数。$f(x)$和$\sin(kx)$的乘积如图 1.14 所示，由于该乘积在x轴上下的积分面积几乎可以抵消，因此，该乘积在每个周期的积分值近似为 0。

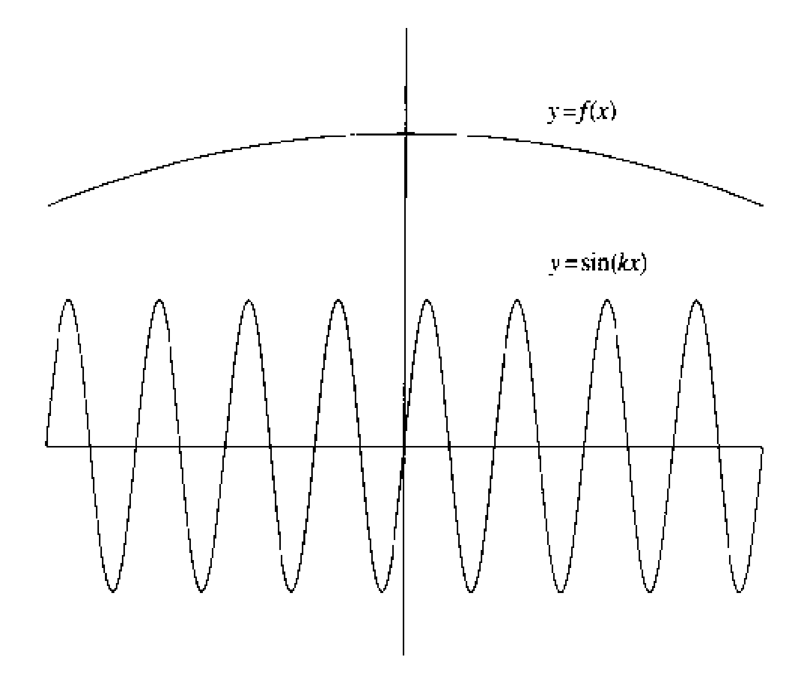


图 1.13 $y = f(x)$ 和 $y = \sin kx$

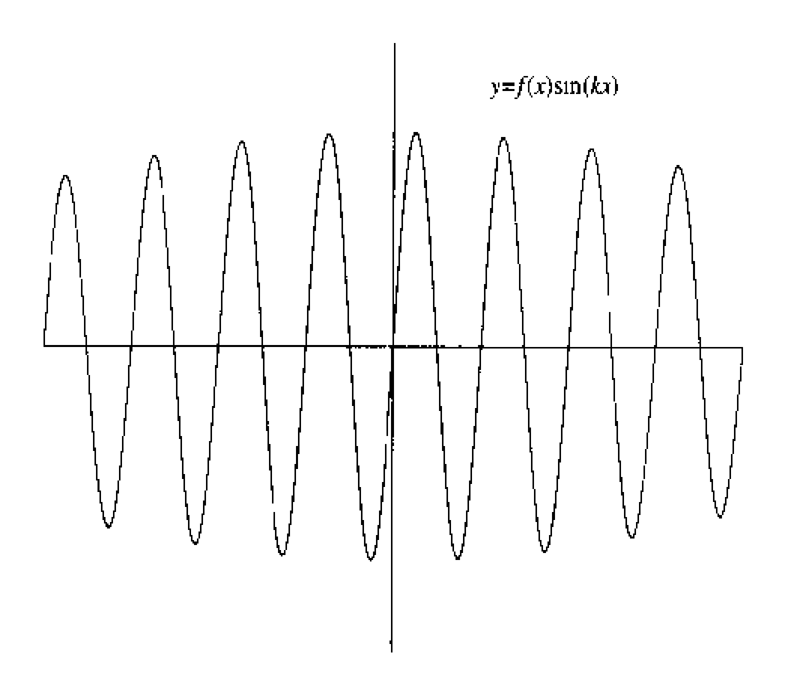


图 1.14 $y = f(x)\sin kx$

在f是可微函数的情况下，下面给出定理 1.21 的严格解析证明、考虑积分式：

$$\int_a^b f(x)\cos(kx)\,dx$$

利用分部积分$u = f$和$dv = \cos kx$，可得：

$$\int_a^b f(x)\cos(kx)\,dx = \frac{\sin(kx)}{k}f(x)\Big|_a^b - \int_a^b \frac{\sin(kx)}{k}f'(x)\,dx$$

$$= \frac{\sin(kb)f(b) - \sin(ka)f(a)}{k} - \int_a^b \frac{\sin(kx)}{k} f'(x)\, dx$$

随着分母中k的变大，等式右边收敛于0，所以定理证毕。

1.3.2 连续点处的收敛性

傅里叶级数展开通常包含无限多项（例1.11和例1.12是例外）。由定义可知，倘若部分和的极限存在，则无限多项的和是部分和的极限；即：

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

因此，如果

$$f(x) = a_0 + \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

就可以说，f的傅里叶级数在x点处收敛于f。下面证明有关傅里叶级数收敛性的第1条定理。

定理 1.22 设f是周期为2π的连续函数。在x点处，如果f的导数有定义，则f的傅里叶级数在x点处收敛于$f(x)$。

证明 对于正整数N，令

$$S_N(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{N} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

这里的a_k和b_k是函数f的傅里叶系数。我们的最终目的是证明当$N\to\infty$时，$S_N(x)\to f(x)$。在证明这一点之前，需要将S_N写成另外一种表示形式。证明过程需要以下几步。

第1步．代入傅里叶系数。将定理1.2中关于a_k和b_k的（1.12）式至（1.14）式代入上式中，可得：

$$\begin{aligned} S_N(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt \\ &\quad + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)\cos(kx)\, dt + \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)\sin(kx)\, dt\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{N}\cos(kt)\cos(kx) + \sin(kt)\sin(kx)\right) dt \end{aligned}$$

利用余弦函数公式$\cos(A-B)=\cos(A)\cos(B)+\sin(A)\sin(B)$可得：

$$S_N(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{N}\cos(k(t-x))\right)dt \tag{1.21}$$

要估计等式右边的和式，需用到下面的引理。

第2步　估计傅里叶核。

引理 1.23　对于任意的u，$-\pi\leqslant u\leqslant\pi$，有

$$\frac{1}{2}+\cos(u)+\cos(2u)+\cdots+\cos(Nu)=\begin{cases}\dfrac{\sin((N+1/2)u)}{2\sin(u/2)} & u\neq 0\\ N+1/2 & u=0.\end{cases}$$

证明　前面已经讲过，复指数定义为$e^{iu}=\cos(u)+i\sin(u)$。注意到

$$(e^{iu})^n=e^{inu}=\cos(nu)+i\sin(nu)$$

因此有$\cos nu=\mathrm{Re}\{(e^{iu})^n\}$，于是

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}+\cos(u)+\cos(2u)+\cdots+\cos(Nu)\\&\qquad=\frac{-1}{2}+(1+\cos(u)+\cos(2u)+\cdots+\cos(Nu))\end{aligned}$$

所以

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{N}\cos ku=\frac{-1}{2}+\mathrm{Re}\left\{\sum_{k=0}^{N}(e^{iu})^k\right\} \tag{1.22}$$

等式右边的和式是等比级数$\sum_{k=0}^{N}z^k$，其中$z=e^{iu}$。

对于任意的z，有：

$$\sum_{k=0}^{N}z^k=\frac{1-z^{N+1}}{1-z} \tag{1.23}$$

该式的证明过程如下：令

$$s_N=\sum_{k=0}^{N}z^k$$

那么

$$\begin{aligned}(1-z)s_N&=(1-z)(1+z+z^2+\cdots+z^N)\\&=(1+z+\cdots+z^N)-(z+z^2+\cdots+z^{N+1})\\&=1-z^{N+1}\end{aligned}$$

两边同除以$(1-z)$，即得到(1.23)式。

在(1.23)式中令$z=e^{iu}$，然后代入到(1.22)式，可得：

$$\frac{1}{2}+\cos(u)+\cos(2u)+\cdots+\cos(Nu)=\frac{-1}{2}+\mathrm{Re}\left\{\frac{1-e^{i(N+1)u}}{1-e^{iu}}\right\} \quad (1.24)$$

为计算右边的表达式，可以对其分子和分母同乘以$e^{-iu/2}$：

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{1-e^{i(N+1)u}}{1-e^{iu}}\right\}=\mathrm{Re}\left\{\frac{e^{-iu/2}-e^{i(N+1/2)u}}{e^{-iu/2}-e^{iu/2}}\right\}$$

上式等号右边的分母等于$-2i\sin(u/2)$，所以

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{1-e^{i(N+1)u}}{1-e^{iu}}\right\}=\frac{\sin(u/2)+\sin((N+1/2)u)}{2\sin(u/2)}$$

将该等式代入(1.24)式的右边，得到：

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}+\cos(u)+\cos(2u)+\cdots+\cos(Nu)&=\frac{-1}{2}+\frac{\sin(u/2)+\sin((N+1/2)u)}{2\sin(u/2)}\\&=\frac{\sin((N+1/2)u)}{2\sin(u/2)}\end{aligned}$$

引理1.23证毕。

第3步：估计傅里叶级数的部分和。在引理1.23中，令$u=t-x$，(1.21)式变为：

$$\begin{aligned}S_N(x)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{N}\cos(k(t-x))\right)dt\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left(\frac{\sin((N+1/2)(t-x))}{\sin((t-x)/2)}\right)dt\\&=\int_{-\pi}^{\pi}f(t)P_N(t-x)\,dt\end{aligned}$$

这里，令

$$P_N(u)=\frac{1}{2\pi}\frac{\sin((N+1/2)u)}{\sin(u/2)} \quad (1.25)$$

在上述积分中，进行变量代换$u=t-x$，可得：

$$S_N(x)=\int_{-\pi-x}^{\pi-x}f(u+x)P_N(u)\,du$$

由于f和P_N的周期均为2π，因此可以在积分的上下限中移去x，而不会改变该积分值（见引理 1.3）。于是有：

$$S_N(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(u+x)P_N(u)\,du \tag{1.26}$$

接下来，需要下面的引理。

第 4 步。对傅里叶核进行积分。

引理 1.24

$$\int_{-\pi}^{\pi} P_N(u)\,du = 1$$

证明　利用引理 1.23，可得：

$$\begin{aligned}P_N(u) &= \frac{1}{\pi}\frac{\sin((N+1/2)u)}{2\sin(u/2)}\\ &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\cos(u)+\cos(2u)+\cdots+\cos(Nu)\right)\end{aligned}$$

对该式进行积分，可得：

$$\int_{-\pi}^{\pi} P_N(u)\,du = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2\pi}\,du + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(u)+\cos(2u)+\cdots+\cos(Nu)\,du$$

等式右边的第 2 个积分等于 0（因为当积分上下限为π的整数倍时，余弦函数的定积分等于 0），等式右边的第 1 个积分等于 1。于是，引理 1.24 得证。

第 5 步。证明定理 1.22 的最后一步。正如证明开始时指出的那样，需要证明当$N\to\infty$时，$S_N(x)\to f(x)$。由（1.26）式中$S_N(x)$的表达式，即只要证明：

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(u+x)P_N(u)\,du \to f(x) \tag{1.27}$$

由引理 1.24 可知，$f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)P_N(u)\,du$，即只要证明：

$$\int_{-\pi}^{\pi}(f(u+x)-f(x))P_N(u)\,du \to 0 \quad \text{当 } N\to\infty$$

利用（1.25）式，上述极限变为：

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{f(u+x)-f(x)}{\sin(u/2)}\right)\sin((N+1/2)u)\,du \to 0 \tag{1.28}$$

假如可以证明函数

$$g(u) = \frac{f(u+x) - f(x)}{\sin(u/2)}$$

是连续的（作为Riemann-Lebesgue引理的必要条件），那么利用Riemann-Lebesgue 引理（见定理1.21），就可以得到（1.28）式。这里，x固定而u是变量，$u \subset [-\pi, \pi]$，只有当$u = 0$时，$g(u)$才不连续。然而根据假设，存在$f'(x) = \lim_{u\to 0} \frac{f(u+x)-f(x)}{u}$，所以有：

$$\begin{aligned}
\lim_{u\to 0} g(u) &= \lim_{u\to 0} \frac{f(u+x) - f(x)}{\sin(u/2)} \\
&= \lim_{u\to 0} \frac{f(u+x) - f(x)}{u} \frac{u/2}{\sin(u/2)} \cdot 2 \\
&= f'(x) \cdot 1 \cdot 2 \quad (\text{因为} \lim_{t\to 0} \frac{t}{\sin t} = 1) \\
&= 2f'(x)
\end{aligned}$$

通过定义$g(0) = 2f'(x)$，则$g(u)$在$u = 0$处也连续。由 Riemann-Lebesgue 引理可知，（1.28）式成立。定理1.22 证毕。

1.3.3 间断点处的收敛性

下面讨论定理 1.22 的一些变化。注意到该定理的假设要求f是连续周期函数。然而，许多我们感兴趣的函数不满足连续性或周期性的要求。比如例 1.9 中，$f(x) = x$ 就不是周期函数，而且f的周期延拓（见图1.15）也不连续。

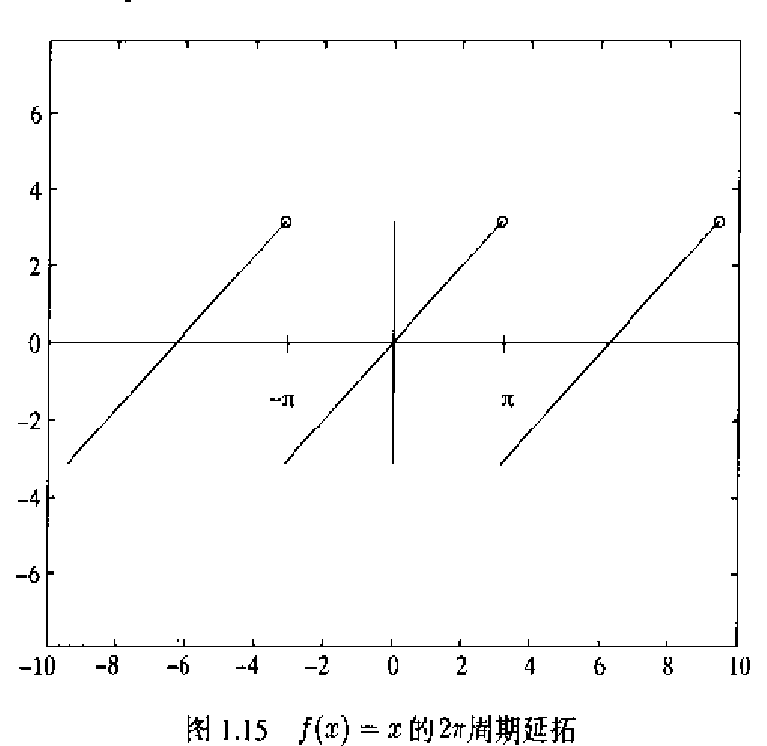


图 1.15 $f(x) = x$ 的2π周期延拓

在表述有关间断点处收敛性的定理之前，需要下面的定义。

定义 1.25

- f在点x处的左右极限定义如下：

$$\text{左极限：}\ f(x-0)=\lim_{h\to0^+}f(x-h)$$
$$\text{右极限：}\ f(x+0)=\lim_{h\to0^+}f(x+h)$$

- 如果下列极限存在：

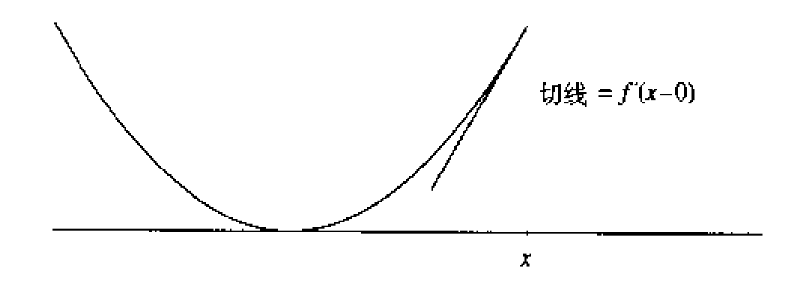
$$f'(x-0)=\lim_{h\to0^-}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

  则称函数f是左可微的。
- 如果下列极限存在：

$$f'(x+0)=\lim_{h\to0^+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

  则称函数f是右可微的。

直观上看，$f'(x-0)$表示f于x点处的切线，且此时$y=f(t)$的图像在其左侧；而$f'(x+0)$也表示f于x点处的切线，但此时$y=f(t)$的图像在其右侧（见图 1.16）。



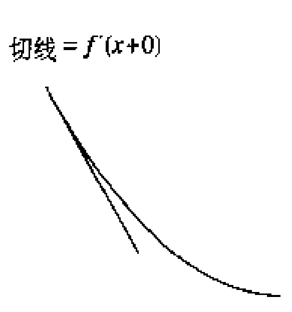


图 1.16　左导数和右导数

例 1.26

令$f(x)$为$y=x$，$-\pi\leqslant x<\pi$的周期延拓（见图1.15），则$f(x)$在$x=\cdots,-\pi,\pi,\cdots$

处不连续。f在$x=\pi$处的左右极限分别为：

$$f(\pi-0)=\pi \qquad f(\pi+0)=-\pi$$

在$x=\pi$处的左右导数分别为：

$$f'(\pi-0)=1 \text{和} f'(\pi+0)=1$$

例 1.27

令

$$f(x)=\begin{cases} x & 0\leqslant x\leqslant \pi/2 \\ \pi-x & \pi/2\leqslant x\leqslant \pi \end{cases}$$

f是如图 1.7 所示的锯齿波。该函数连续，但在$x=\pi/2$处不可微，在$x=\pi/2$处的左右导数分别为：

$$f'(\pi/2-0)=1 \text{和} f'(\pi/2+0)=-1$$

下面将表述f不连续时，傅里叶级数的收敛定理。

定理 1.28 设$f(x)$是周期性分段连续函数。设在x点处，f左右可微（但未必连续），则f的傅里叶级数在x点处收敛于

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}。$$

该定理说明，在间断点处，f的傅里叶级数收敛于该点左极限与右极限的算术平均值。在连续点处，左右极限相同，此时定理 1.28 退化为定理 1.22。

例 1.29

令$f(x)$为函数$y=x$，$-\pi\leqslant x<\pi$的周期延拓。如例1.26所述，f在$x=\pi$处不连续，但左右可微。定理 1.28 表明，其傅里叶级数$F(x)$收敛于f在$x=\pi$处左极限与右极限的算术平均值。由于$f(\pi-0)=\pi$，$f(\pi+0)=-\pi$，所以由定理 1.28 得到$F(\pi)=0$。该结果与例 1.9 中用傅里叶级数公式计算得到的结果一致：

$$F(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{k+1}}{k}\sin(kx)$$

上式在$x=\pi$处的值为 0。F如图1.17所示。注意，F在$x=\pm\pi$和$x=\pm3\pi$处的值（由实心点表示）等于其在$x=\pm\pi$和$x=\pm3\pi$处左右极限的平均值。

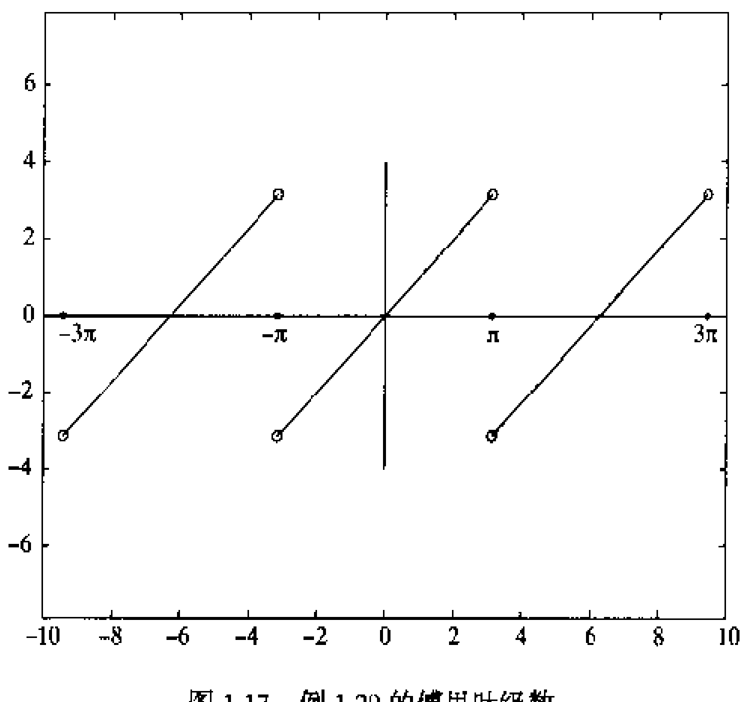


图 1.17　例 1.29 的傅里叶级数

定理 1.28 的证明　本定理的证明与定理 1.22 的证明类似，下面只列出有变化的部分。

第 1 步至第 3 步没有变化。第 4 步需要进行如下修改。

第 4′步。

$$\int_0^\pi P_N(u)\,du = \int_{-\pi}^0 P_N(u)\,du = \frac{1}{2}$$

这里：

$$P_N(u) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin(N+1/2)u}{\sin u/2}$$

实际上，这些等式可由引理1.24以及 $P_N(u)$ 为偶函数这一实事得到（因此左半部分的积分和右半部分的积分相等，总的积分值等于 1）。

第 5 步可由以下步骤代替。

第 5′步。要证明定理1.28，必须得到：

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(u+x)P_N(u)\,du \quad\rightarrow\quad \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} \qquad (1.29)$$

当 $N\rightarrow\infty$。

通过确定下列两个极限：

$$\int_0^{\pi} f(u+x)P_N(u)\,du \quad \to \quad \frac{f(x+0)}{2}$$

$$\int_{-\pi}^{0} f(u+x)P_N(u)\,du \quad \to \quad \frac{f(x-0)}{2}$$

可以得到（1.29）式。利用第4′步，上述极限等价为：

$$\int_0^{\pi} (f(u+x)-f(x+0))P_N(u)\,du \quad \to \quad 0 \tag{1.30}$$

$$\int_{-\pi}^{0} (f(u+x)-f(x-0))P_N(u)\,du \quad \to \quad 0 \tag{1.31}$$

利用$P_N(u)$的定义，(1.30)式等价为证明：

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{f(x+u)-f(x+0)}{\sin(u/2)}\right)\sin((N+1/2)u)\,du \quad \to \quad 0$$

利用与第5步采用的完全相同的Riemann-Lebesgue引理，即得到该极限。由于上述积分中，u为正数，因此只需要知道括号内的表达式右连续（即当$u\to 0^+$时，存在右极限）。由于已假设f是右可微的，因此，可参照第5步中关于此极限的讨论，进行余下的处理（$u>0$）。

（1.31）式的证明过程同前类似。定理1.28证毕。

1.3.4 一致收敛

下面讨论傅里叶级数的一致收敛。如定义0.8所述，如果函数序列$F_n(x)$的收敛速度不依赖x，则$F_n(x)$一致收敛于$F(x)$。换句话说，对于任意给定的小$\epsilon>0$（例如，$\epsilon=.01$），总存在一个不依赖于x的数N，使得当$n\geqslant N$时，对于一切x，都有$|F_n(x)-F(x)|<\epsilon$。如果F_n不一致收敛，那么对于不同的x值，只能选择不同的N值以得到相同的收敛精度。

如果当$N\to\infty$时，部分和序列

$$S_N(x)=a_0+\sum_{k=1}^{N} a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)$$

一致收敛于$f(x)$，则称$f(x)$的傅里叶级数一致收敛于$f(x)$，其中，a_k和b_k是f的傅里叶系数。

由图1.8和图1.9可知，例1.10中的傅里叶级数一致收敛于$f(x)$。而例1.9中的傅里叶级数就不一致收敛于$f(x)$，x越接近于f的间断点，其收敛速度越慢。例1.9中，当x接近间断点时，傅里叶级数的部分和的项数N必须增大，才能达到一定的收敛精度。

要表述下面的一致收敛定理，还需要一个定义。如果函数连续，且除了一个离散点集外，其导数都有定义，则称该函数为**分段光滑的**。例如，例1.10中的锯齿波函数就是分段光滑的，这是因为除了$\pi/2$的整数倍以外的点（这就是一个离散点集），f的导数都存在。

下面表述在区间$[-\pi,\pi]$上的傅里叶级数的一致收敛定理。若π被任意实数a代替，则该定理同样成立。

定理 1.30　周期为2π的分段光滑函数$f(x)$的傅里叶级数，在区间$[-\pi,\pi]$上一致收敛于$f(x)$。

例 1.31

考虑例1.10中的锯齿波，其周期延拓是分段光滑函数，由图 1.7 可清楚地看到这一点。因此，定理 1.30 保证了其傅里叶级数的一致收敛。

例 1.32

考虑例 9 中在区间$[-\pi,\pi]$上函数$f(x) = x$的傅里叶级数。由于$f(x) = x$不是周期函数，需要将其进行周期延拓，如图 1.4 所示。注意，其周期延拓不连续，因而不是分段光滑函数[尽管$f(x) = x$是处处光滑的函数]。因此，不能应用定理 1.30。事实上，由于该例中的 Gibbs 现象（见图 1.5 和图 1.6），其傅里叶级数不一致收敛。

定理 1.30 的证明　为简单起见，仅假设f二次可微，在此条件下证明该定理。第 1 步，证明f的傅里叶系数与f''的相应傅里叶系数之间的关系：如果

$$f(x) = \sum_n a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \text{ 和 } f''(x) = \sum_n a_n'' \cos(nx) + b_n'' \sin(nx)$$

则

$$a_n = \frac{-a_n''}{n^2} \tag{1.32}$$

$$b_n = \frac{-b_n''}{n^2} \tag{1.33}$$

要确立第 1 个关系式，需要用分部积分计算a_n的积分式（定理1.2）：

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \\ &= f(x)\frac{\sin(nx)}{n}\bigg|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\frac{\sin(nx)}{n}\,dx \end{aligned}$$

由于$\sin n\pi = \sin(-n\pi) = 0$，所以上式右边第 1 项等于 0。上式右边第 2 项为$-b_n'/n$，这里的b_n'是f'的傅里叶正弦系数。重复这一过程[这次令$dv = (\sin nx)/n$ 和$u = f'$]，得：

$$a_n = \frac{-1}{\pi n^2}\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\cos(nx)\,dx$$

式子右边等于$-a_n''/n^2$，则（1.32）式得证。（1.33）式的证明过程与（1.32）式的类似。

如果f''连续，则a_n''和b_n''都将以某个数M为界（事实上，根据 Riemann-Lebesgue 引理，当$n \to \infty$时，a_n''和b_n''都收敛于0）。因此，利用（1.32）式和（1.33）式有：

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |b_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n''| + |b_n''|}{n^2} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M+M}{n^2}$$

根据级数的积分检验法则，该级数有限（例如，由于$\int_1^{\infty} dx/x^2$有限，所以$\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$有限）。于是，定理 1.30 的证明可由如下的引理得到。

引理 1.33 设

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

这里

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| + |b_k| < \infty$$

则傅里叶级数一致并绝对收敛于函数$f(x)$。

证明 首先要估计

$$|a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)| \leqslant |a_k| + |b_k| \tag{1.34}$$

（由于$|\cos t|, |\sin t| \leqslant 1$，所以成立）。于是，$f$的傅里叶级数在任意点$x$处的收敛速度受$\sum_k |a_k| + |b_k|$收敛速度的控制。更进一步，令

$$S_N(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{N} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

那么

$$f(x) - S_N(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

$$-\left(a_0+\sum_{k=1}^{N}a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)\right)$$

a_0以及$k=N$的各项抵消了，因此有：

$$f(x)-S_N(x)=\sum_{k=N+1}^{\infty}a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)$$

根据（1.34）式，对所有x，均一致地有：

$$|f(x)-S_N(x)|\leqslant\sum_{k=N+1}^{\infty}|a_k|+|b_k| \tag{1.35}$$

根据假设，级数$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|+|b_k|$收敛，只要选择足够大的$N$，则该级数的末项能够任意小。所以，给定$\epsilon>0$，总存在整数$N_0>0$，使得若$N>N_0$，那么$\sum_{k=N+1}^{\infty}|a_k|+|b_k|<\epsilon$，则（1.35）式变为：对所有的$x$，$N>N_0$时，$|f(x)-S_N(x)|<\epsilon$。

N不依赖于x，只依赖于$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|+|b_k|$的收敛速度。因此，$S_N(x)$一致收敛，这就完成了引理1.33和定理1.30的证明。

1.3.5 依平均收敛

正如上一节指出的那样，如果f不连续，则在$f(x)$的间断点处，其傅里叶级数不收敛于$f(x)$（收敛于该点左右极限的平均值）。傅里叶级数不一致收敛或不逐点收敛的地方，也许可以在更弱的意义上，例如，依L^2收敛（依平均收敛）。本节将研究傅里叶级数的L^2收敛。同样，首先要在本节表述和证明周期为2π函数的结论，然而该结论在其他区间上也成立（用任意实数a代替π，并应用区间$[-a,a]$上傅里叶级数的适当形式）。

首先，我们要回忆第0章有关内积空间的一些定义。这里研究的空间是$V=L^2([-\pi,\pi])$，它由所有平方可积函数（如$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx<\infty$的函数$f$）组成。$V$是内积空间，有如下内积定义：

$$\langle f,g\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

于是该空间的范数$\|f\|$定义为：

$$\|f\|^2=\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx$$

请特别注意内积空间上两个重要的不等式：

$$\langle f,g\rangle_V \leqslant \|f\|\,\|g\| \qquad \|f+g\| \leqslant \|f\|+\|g\|$$

第 1 个称为 Schwarz 不等式，第 2 个称为三角不等式.

令V_N是由$\{1,\cos(kx),\sin(kx),k=1,\cdots,N\}$张成的空间 和式

$$c_0+\sum_{k=1}^{N}c_k\cos(kx)+d_k\sin(kx)$$

为V_N上的一个元素，这里，c_k和d_k为任意复数。设f属于$L^2[-\pi,\pi]$，令

$$f_N(x)=a_0+\sum_{k=1}^{N}a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)\in V_N$$

为f的部分傅里叶级数．这里的a_k和b_k是由定理 1.2 给出的傅里叶系数。定理 1.2 证明过程中的关键在于，a_k和b_k是由f在$\cos(kx)$和$\sin(kx)$张成的空间上的正交投影得到的（见证明结尾的注释）。因此，f_N是f在空间V_N上的正交投影．特别地，f_N是空间V_N上L^2意义下最接近于f的元素。我们将上述讨论总结为下面的引理。

引理 1.34 设f是空间$V=L^2([-\pi,\pi])$的元素，令V_N是由$\{1,\cos(kx),\sin(kx),1\leqslant k\leqslant N\}$张成的线性空间。令

$$f_N(x)=a_0+\sum_{k=1}^{N}a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)$$

这里的a_k和b_k是f的傅里叶系数。则f_N是空间V_N上依L^2范数最接近于f的元素，即：

$$\|f-f_N\|_{L^2}=\min_{g\in V_N}\|f-g\|_{L^2}$$

本节的主要结论总结于下面的定理中：

定理 1.35 设f是空间$L^2([-\pi,\pi])$的元素。令

$$f_N(x)=a_0+\sum_{k=1}^{N}a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)$$

这里的a_k和b_k是f的傅里叶系数，则f_N收敛于$L^2([-\pi,\pi])$上的f，即，当$N\to\infty$时，$\|f_N-f\|_{L^2}\to 0$。

对于傅里叶级数的复数形式，定理 1.35 也成立。

定理 1.36 设f是$L^2([-\pi,\pi])$的元素，其（复）傅里叶系数为：

$$\alpha_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-int}\,dt \quad n\in Z$$

则当$N \to \infty$时，部分和

$$f_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} \alpha_k e^{ikt}$$

依$L^2([-\pi, \pi])$范数收敛于f。

例 1.37

本章所有的例子都是来自于L^2空间上的函数（每个例子中函数的定义域可能有所不同），因此，本章每个例子中函数的傅里叶级数都依平均收敛。

证明　定理1.35与定理1.36的证明类似．这里只证明定理1.35。

证明包括两个关键步骤。第1步（下面的引理）表明，$L^2([-\pi, \pi])$空间上的任意函数，均可以依L^2范数，用一个分段光滑的周期函数g逼近．第2步（定理1.30）表明，g的傅里叶级数可以一致地逼近g（当然是依L^2逼近）。首先由下面的引理开始。

引理 1.38　$L^2([-\pi, \pi])$空间上的函数可由一个周期为2π的光滑函数任意逼近。

该引理的严格证明超出了本书的范围，但是，我们可以给出该引理为什么成立的直观解释。通常$L^2([-\pi, \pi])$空间上的元素f是不连续的，即使它本身连续，其周期延拓通常也不连续．证明的基本思路就是将f的连续部分连接起来，变成一个光滑函数g。这可以通过图1.18、图1.19和图1.20来说明。图1.18是$L^2([-\pi, \pi])$空间上一个典型元素f的图像，其周期延拓见图1.19。图1.20就是将f的连续部分连接起来后形成的连续函数g的图像。通过把线条间的接头处适当平滑，可使g成为光滑函数。由于f的延拓具有周期性，因此也可以使g成为周期函数。

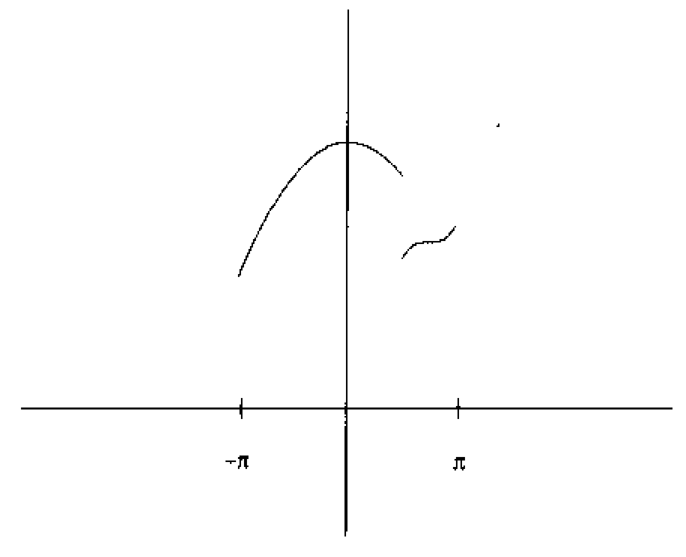


图 1.18　L^2中一个典型的f

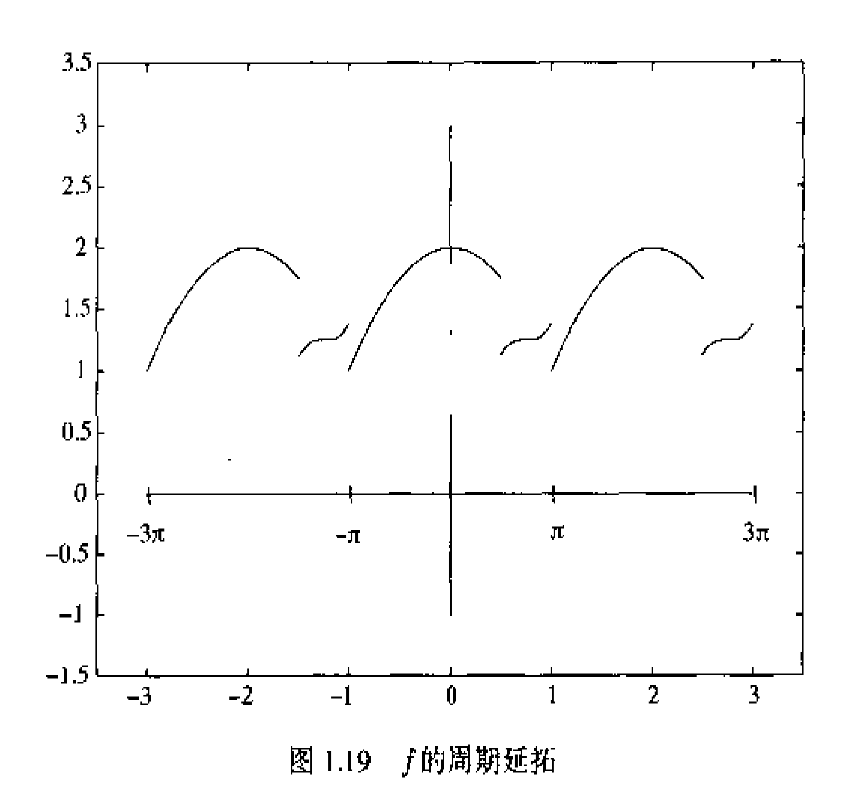


图 1.19 f的周期延拓

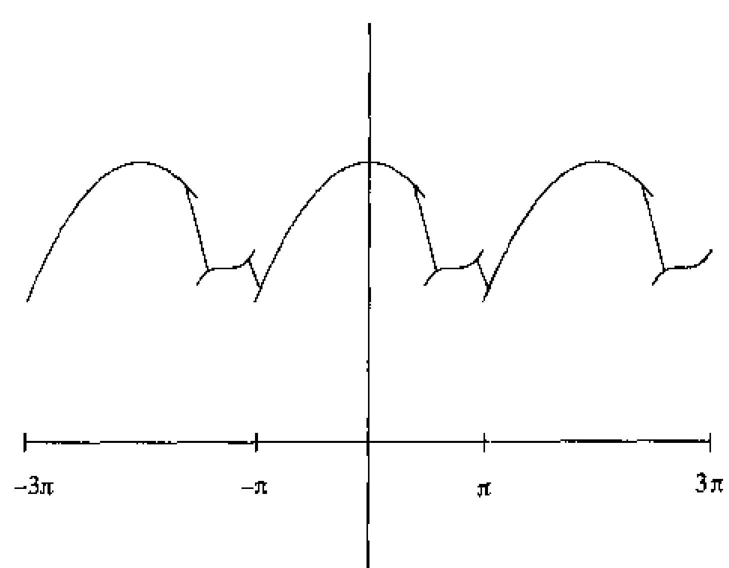


图 1.20 连续函数g对f的逼近

除了连接f的线段外，g的图像同f的图像完全重合。由于每个连接线段在x方向上的宽度非常短（通过增加连接线段的斜率），因此在L^2范数意义上，可以使g非常接近于f。习题 27 会更详细地探讨这些问题。

下面完成定理 1.35 的证明。利用引理 1.38 和定理 0.10，对于任意$\epsilon > 0$，存在可微周期函数g，使得：

$$\|f - g\|_{L^2} < \epsilon \tag{1.36}$$

令

$$g_N(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{N} c_k \cos(kx) + d_k \sin(kx)$$

这里的c_k和d_k分别是g的傅里叶余弦级数和正弦级数。由于g是可微的周期函数，因此可以用g_N一致逼近g（利用定理 1.30）。通过选择足够大的N_0，使得当$N > N_0$时，对于所有的$x \in [-\pi, \pi]$，均有$|g(x) - g_N(x)| < \epsilon$。所以

$$\|g - g_N\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |g(x) - g_N(x)|^2 \, dx \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \epsilon^2 \, dx \quad \text{if } N > N_0$$
$$= 2\pi\epsilon^2$$

两边开方得：

$$\|g - g_N\| < \sqrt{2\pi}\epsilon$$

把上述估计与（1.36）式结合起来，得到：

$$\begin{aligned}\|f - g_N\| &= \|f - g + g - g_N\| \\ &\leqslant \|f - g\| + \|g - g_N\| \text{（三角不等式）} \\ &< \epsilon + \sqrt{2\pi}\epsilon \qquad N > N_0\end{aligned}$$

由于当$k \leqslant N$时，g_N是$\sin(kx)$和$\cos(kx)$的线性组合，因此g_N属于V_N。前面已经证明了f_N是空间V_N上依L^2范数最接近于f的元素（见引理 1.34），因此有结论：

$$\|f - f_N\| \leqslant \|f - g_N\| < (1 + \sqrt{2\pi})\epsilon \quad \text{for } N > N_0$$

由于ϵ可以任意小，因此定理 1.35 得证。

定理 1.35 和定理 1.36 的推论之一，是下面著名的 Parseval 等式。我们将分别表述其实数和复数形式。

定理 1.39 Parseval 等式——实数形式。设

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \ \in \ L^2[-\pi, \pi]$$

那么

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx = 2|a_0|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 + |b_k|^2 \tag{1.37}$$

定理 1.40 Parseval 等式——复数形式。设

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{ikx} \ \in \ L^2[-\pi, \pi]$$

那么

$$\frac{1}{2\pi}\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty}|\alpha_k|^2 \tag{1.38}$$

更进一步，对于$L^2[-\pi,\pi]$空间上的f和g，有：

$$\frac{1}{2\pi}\langle f,g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\overline{g(t)}\,dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha_n\overline{\beta_n} \tag{1.39}$$

注释。 信号的L^2范数通常解释为信号的能量。其物理解释是，信号傅里叶系数的平方可以度量相应频率分量的能量。因此，Parseval 等式的物理解释为，信号的总能量是各频率分量的能量之和（见例 1.41）。

证明 只证明复数形式的 Parseval 等式，实数形式的证明与之类似。

首先证明（1.39）式．在（1.39）式中令$f=g$，即可得到（1.38）式。

令

$$f_N(x) = \sum_{k=-N}^{N}\alpha_k e^{ikx}$$

$$g_N(x) = \sum_{k=-N}^{N}\beta_k e^{ikx}$$

分别为f和g的傅里叶级数的部分和。由定理 1.36，在$L^2[-\pi,\pi]$空间上，当$N\to\infty$时，$f_N\to f$，$g_N\to g$。于是有：

$$\langle f_N,g_N\rangle = \langle\sum_{k=-N}^{N}\alpha_k e^{ikx},\sum_{n=-N}^{N}\beta_n e^{inx}\rangle = \sum_{k=-N}^{N}\sum_{n=-N}^{N}\alpha_k\overline{\beta_n}\langle e^{ikx},e^{inx}\rangle$$

由于$\{e^{ikx}/\sqrt{2\pi},k=\cdots,-1,0,1,\cdots\}$是正交的，则当$k=n$时，$\langle e^{ikx},e^{inx}\rangle=2\pi$，当$k\neq n$时，$\langle e^{ikx},e^{inx}\rangle=0$．因此有：

$$\langle f_N,g_N\rangle = \sum_{n=-N}^{N}\alpha_n\overline{\beta_n}\langle e^{inx},e^{inx}\rangle = 2\pi\sum_{n=-N}^{N}\alpha_n\overline{\beta_n}$$

如果能够证明：

$$\langle f_N,g_N\rangle\to\langle f,g\rangle\text{，当 }N\to\infty\text{时。} \tag{1.40}$$

那么只要令$N\to\infty$，就可以得到（1.39）式。

要证明（1.40）式，由

$$\begin{aligned}|\langle f,g_{,}\rangle-\langle f_N,g_N\rangle| &= |(\langle f,g_{,}\rangle-\langle f,g_N\rangle)+(\langle f,g_N\rangle-\langle f_N,g_N\rangle)|\\ &\leqslant|\langle f,g-g_N\rangle|+|\langle f-f_N,g_N\rangle|\\ &\leqslant\|f\|\,\|g-g_N\|+\|f-f_N\|\,\|g_N\|\end{aligned}$$

其中最后一步可由Schwarz 不等式得到。由于在L^2空间上，$\|f_N-f\|\to 0$，$\|g-g_N\|\to 0$（见定理 1.36）当$N\to\infty$时，上边不等式的右边收敛于 0，因此（1.40）式得证。

注意。如果（1.38）式右边的级数在某个N处截断，则等式右边只会变小，于是有如下不等式：

$$\sum_{k=-N}^{N}|\alpha_k|^2\leqslant\frac{1}{2\pi}\|f\|^2$$

这就是著名的 Bessel 不等式.

例 1.41

如前所述，Parseval 定理解释为，信号的总能量是其傅里叶谐波分量的能量之和。在例 1.9 中，我们发现，函数$f(x)=x$，$-\pi\leqslant x<\pi$的傅里叶系数为$a_n=0$，$b_n=2(-1)^{n+1}/n$。由（1.37）式可得：

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}$$

求出等式左边的积分值，然后两边同除以 4，可得：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

该和式的另一种计算方法见习题18。

1.4　习题

1. 在区间$-\pi\leqslant x\leqslant\pi$上，将函数$f(x)=x^2$展开成傅里叶级数。画出$f$以及$N=1, 2, 5, 7$时，傅里叶级数的部分和

$$S_N(x)=\sum_{k=0}^{N}a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)$$

的图像。观察部分和S_N的图像与f的图像的接近情况。对区间$-2\pi\leqslant x\leqslant 2\pi$重复以上过程。

2. 对区间$-1 \leqslant x \leqslant 1$重复上题。即在区间$-1 \leqslant x \leqslant 1$上，将函数$f(x)=x^2$展开成傅里叶级数。分别在区间$-1 \leqslant x \leqslant 1$和$-2 \leqslant x \leqslant 2$上，画出$f$以及$N = 1, 2, 5, 7$时，傅里叶级数的部分和

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \cos(\pi k x) + b_k \sin(\pi k x)$$

的图像。

3. 在区间$0 \leqslant x \leqslant \pi$上，将函数$f(x)=x^2$展开成傅里叶余弦级数。
4. 在区间$0 \leqslant x \leqslant 1$上，将函数$f(x)=x^2$展开成傅里叶正弦级数。
5. 在区间$0 \leqslant x \leqslant \pi$上，将函数$f(x) = x^3$展开成傅里叶余弦级数。
6. 在区间$0 \leqslant x \leqslant 1$上，将函数$f(x) = x^3$展开成傅里叶正弦级数。
7. 在区间$-\pi \leqslant x \leqslant \pi$上，将函数$f(x)=|\sin x|$展开成傅里叶级数。
8. 将下列函数

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -1/2 < x \leqslant 1/2 \\ 0 & -1 < x \leqslant -1/2 \text{ 或 } 1/2 < x \leqslant 1 \end{cases}$$

展开成区间$-1 \leqslant x \leqslant 1$上的傅里叶级数。画出$f$以及$N = 5, 10, 20, 40$时，其傅里叶级数的部分和的图像。本题中级数收敛于$f$的速度要比习题1中的慢多少？本题中收敛速度慢的原因是什么？

9. 在区间$-\pi \leqslant x \leqslant \pi$上，将函数$f(x)=e^{rx}$展开成傅里叶级数。$r=1/2$时，分别画出区间$-\pi \leqslant x \leqslant \pi$和$-2\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$上，$f$以及$N = 10, 20$和$30$时，傅里叶级数的部分和的图像。
10. 利用上一题的结果，计算区间$-\pi \leqslant x \leqslant \pi$上，函数$f(x)=\sinh x = (e^x - e^{-x})/2$和$f(x)=\cosh(x) = (e^x + e^{-x})/2$的傅里叶系数。
11. 在区间$0 \leqslant x \leqslant \pi$上，将函数$f(x) = \cos x$展开成傅里叶正弦级数。
12. 证明

$$\int_0^1 \cos(2n\pi x) \sin(2k\pi x)\, dx = 0$$

13. 证明

$$\{\cdots, \frac{1}{\sqrt{a}} \cos(\frac{2\pi t}{a}), \frac{1}{\sqrt{a}} \cos(\frac{\pi t}{a}), \frac{1}{\sqrt{2a}}, \frac{1}{\sqrt{a}} \sin(\frac{\pi t}{a}), \frac{1}{\sqrt{a}} \sin(\frac{2\pi t}{a}), \cdots\}$$

是$L^2([-a,a])$上的标准正交函数集。证明定理 1.4。

14. 证明引理 1.16 和定理 1.20。

15. 令$F(x)$是函数

$$f(x)=\begin{cases}1 & -1/2<x\leqslant 1/2\\ 0 & -1<x\leqslant -1/2 \text{ 或 } 1/2<x\leqslant 1\end{cases}$$

的傅里叶级数，确定区间$-1\leqslant x\leqslant 1$上$F(x)$的精确值。

16. 如果$f(x)$在区间$0\leqslant x\leqslant a$上连续，证明其周期偶延拓处处连续。其周期奇延拓也处处连续吗？要使此命题成立，还需要什么条件？

17. 考虑锯齿波函数和其傅里叶级数（见例 1.10）。

（a）利用本章的收敛定理解释为什么锯齿波函数的傅里叶级数逐点收敛于该函数。

（b）利用（a）证明

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

18. 在习题 1 中，得到了区间$-\pi\leqslant x\leqslant\pi$上函数$f(x)=x^2$的傅里叶级数。解释一下为什么该级数在$[-\pi,\pi]$上一致收敛于$x^2$。利用此结论，证明$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$。（提示：在$x=\pi$处会发生什么？）

19. 画出下列函数的傅里叶级数的草图（两个周期的）。说明各函数的傅里叶级数是否一致收敛（不必计算出傅里叶系数）。

（a）$f(x)=e^x,\ -1<x\leqslant 1$

（b）$f(x)=\begin{cases}1 & 1/2<x\leqslant 1/2\\ 0 & -1<x\leqslant -1/2 \text{ 或 } 1/2<x\leqslant 1\end{cases}$

（c）$f(x)=x-x^2,\ -1<x\leqslant 1$

（d）$f(x)=1-x^2,\ -1<x\leqslant 1$

（e）$f(x)=\cos x+|\cos x|,\ -\pi<x\leqslant\pi$

（f）$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x} & -\pi<x\leqslant\pi,\ x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$

20. 对于习题 19 中的每个函数，说明它们的傅里叶正弦级数和傅里叶余弦级数（相应的半个周期）是否在整个实轴上（$-\infty<x<\infty$）一致收敛。

21. 如果F的周期为2π，c为任意实数，证明：

$$\int_{-\pi}^{-\pi+c}F(x)\,dx=\int_{\pi}^{\pi+c}F(x)\,dx$$

提示：利用变量代换$x=t-2\pi$。然后利用本题，证明引理1.3。

22. 如果f是区间$[-\pi,\pi]$上的实值偶函数，证明其复傅里叶系数为实数。如果f是区间

$[-\pi,\pi]$上的实值奇函数。证明其复傅里叶系数为纯虚数（即实部为0）

23. 设f连续可微[即对于所有的 $x, f'(x)$连续]，周期为2π。不用定理1.35，证明f的傅里叶级数依平均收敛。提示：利用f的傅里叶系数和f'的傅里叶系数（在证明定理1.30的过程中给出的）之间的关系。

24. 由定理1.8可知，奇函数的傅里叶级数只含有正弦项。还需要什么条件才能保证偶函数f的傅里叶正弦系数为0？给出满足这一附加条件的函数的例子。

25. 设存在一个非负数序列$\{M_n\}$，且$\sum_n M_n$收敛。设a_n，b_n满足：

$$|a_n|,\ |b_n| \leqslant M_n,\ \text{对所有的}n \geqslant 0$$

证明如下级数在$-\infty < x < \infty$上一致收敛：

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

26. 证明无限区间上如下形式的 Riemann-Lebesgue 引理。设f是$a \leqslant t < \infty$上的连续函数，且$\int_a^\infty |f(t)|\,dt < \infty$，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^\infty f(t)\cos nt\,dt = \lim_{n\to\infty}\int_a^\infty f(t)\sin nt\,dt = 0$$

提示：将$a \leqslant t < \infty$分为两个区间$a \leqslant t \leqslant M$和$M \leqslant t < \infty$，存在一个足够大的$M$，使得$\int_M^\infty |f(t)|\,dt < \epsilon/2$；将通常形式的 Riemann-Lebesgue 引理应用于第1个区间。

27. 本题用一个特殊的函数来探究引理1.38的证明思路。令

$$f(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leqslant t \leqslant 1/2 \\ 1 & 1/2 < t \leqslant 1 \end{cases}$$

对于$0 < \delta < 1/2$，令

$$g_\delta(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leqslant t \leqslant 1/2 - \delta \\ \frac{t}{2\delta} - \frac{1}{4\delta} + \frac{1}{2} & 1/2 - \delta < t \leqslant 1/2 + \delta \\ 1 & 1/2 + \delta < t \leqslant 1 \end{cases}$$

画出f以及$\delta = 0.1$时g_δ的图像。证明当$\delta \mapsto 0$时，$\|f - g_\delta\|_{L^2[0,1]} \mapsto 0$。注意，$g_\delta$为连续函数，但不可微。你能修改$g_\delta$的定义，使$g_\delta$属于$C^1$（一次连续可导）且满足$\lim_{\delta\mapsto 0}\|f - g_\delta\|_{L^2[0,1]} = 0$吗？

28. 本题将解释 Gibbs 现象，该现象在间断点附近表现得比较明显。我们将考察在区间$-\pi \leqslant t \leqslant \pi$上的函数

$$f(t)=\begin{cases}\pi-t & 0\leqslant t\leqslant\pi\\ -\pi-t & -\pi\leqslant t<0\end{cases}$$

的傅里叶级数的Gibbs现象（见图1.21，其中有f及其傅里叶级数的部分和的图像）。请完成下列各项证明。

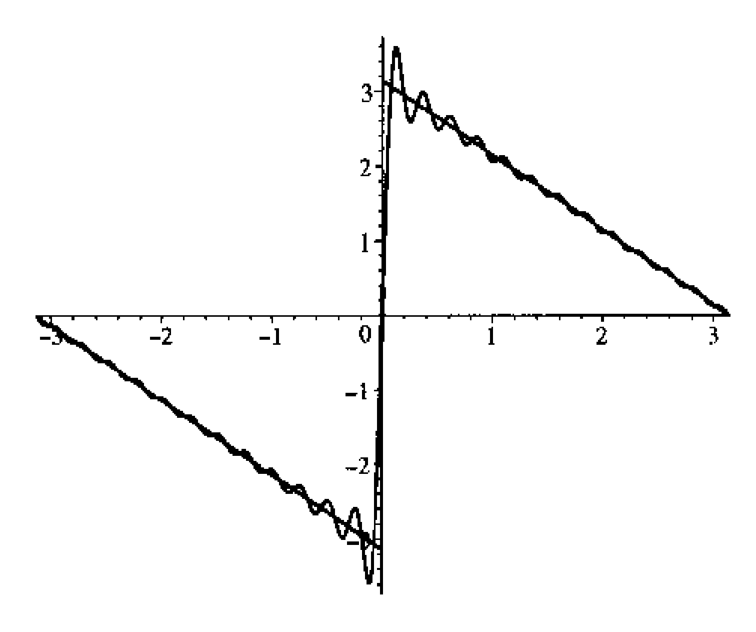


图 1.21　Gibbs 现象

（a）证明f的傅里叶级数为：

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$$

（b）令

$$g_N(x)=2\sum_{n=1}^{N}\frac{\sin nx}{n}-(\pi-x)$$

这里的g_N表示$f(x)$与其傅里叶级数前N项部分和之差。接下来需要证明，当N较大时，g_N的最大值大于 0.5，即呈现出 Gibbs 现象。

（c）证明 $g'_N(x)=2\pi P_N(x)$，这里：

$$\begin{aligned}P_N(x)-\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\cos x\cdots+\cos Nx\right)\\ =\frac{1}{2\pi}\frac{\sin(N+1/2)x}{\sin(x/2)}\end{aligned}\qquad \text{由引理1.23}$$

（d）证明 $\theta_N=\pi/(N+1/2)$是$x=0$的右侧，g_N的第 1 个临界点。

（e）利用微积分的基本定理和（3），证明：

$$g_N(\theta_N) = \int_0^{\theta_N} \frac{\sin(N+1/2)x}{\sin(x/2)}\,dx - \pi$$

（f）证明：

$$\lim_{N\to\infty} g_N(\theta_N) = 2\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx - \pi。$$

提示：进行变量代换$\phi = (N+1/2)x$，再利用$t \to 0$时，$\sin t/t \to 1$。

（g）通过估计积分值，证明：

$$2\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx - \pi \approx 0.562$$

因而，当N较大时，Gibbs 现象或者说前N项之和与函数f之差约为 0.562。

29. 利用 Parseval 定理和习题 1 中的级数，求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$的值。

下面的两个习题需要用符号计算语言（如 Maple 或 MATLAB）来计算傅里叶系数。

30. 考虑函数：

$$f(x) = e^{-x^2/10}\,(\cos 2x + 2\sin 4x + 0.4\cos 2x\cos 40x)$$

n取什么值时，傅里叶系数$a(n)$和$b(n)$是显著的（即绝对值大于 0.01）？为什么？计算到$n = 50$时的$a(n)$和$b(n)$，看看你对n的判断是否正确。画出直到$n = 6$时的部分和的图像，并与原函数$f(x)$的图像进行比较。

31. 考虑函数：

$$g(x) = e^{-x^2/8}\,(\cos 2x + 2\sin 4x + 0.4\cos 2x\cos 10x)$$

计算直到$N = 25$时的傅里叶级数的部分和，在舍去绝对值小于0.01 的傅里叶系数后，画出部分和的图像并与原函数$g(x)$比较。选取不同的容限值（不为 0.01 时），然后重复上述试验。

余下的习题是把傅里叶级数当做解本章开始时所述的偏微分方程的工具。

32. 求解如下的热力学问题：

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} && t>0,\ 0\leqslant x\leqslant 1 \\ u(0,x) &= x - x^2 && 0\leqslant x\leqslant 1 \\ u(0,t) &= u(1,t) = 0 \end{aligned}$$

33. 如果边界条件$u(0,t) = A$和$u(1,t) = B$不一样（即，A和B未必都为 0），则必须修改例 1.14 给出的步骤以解下面的热力学方程：

$$
\begin{aligned}
u_t &= u_{xx} \qquad t>0,\ 0\leqslant x\leqslant 1\\
u(x,t) &= f(x) \qquad 0\leqslant x\leqslant 1\\
u(0,t) &= A \quad u(1,t)=B
\end{aligned}
$$

令$L(x)$是线性函数，且$L(0)=A$，$L(1)=B$。令$\hat{u}(x,t)=u(x,t)-L(x)$。证明$\hat{u}$是下列问题的解：

$$
\begin{aligned}
\hat{u}_t &= \hat{u}_{xx} \qquad t>0,\ 0\leqslant x\leqslant 1\\
\hat{u}(x,t) &= f(x)-L(x) \qquad 0\leqslant x\leqslant 1\\
\hat{u}(0,t) &= 0, \quad \hat{u}(1,t)=0
\end{aligned}
$$

利用例 1.14 给出的解题方法，可以得到上述热力学方程的解$\hat{u}$。原热力学方程的解u，可以由等式$u(x,t)=\hat{u}(x,t)+L(x)$得到。

34. 参考上题的解题步骤，解下面的热力学方程：

$$
\begin{aligned}
u_t &= u_{xx} \qquad t>0,\ 0\leqslant x\leqslant 1\\
u(0,x) &= 2-x^2 \qquad 0\leqslant x\leqslant 1\\
u(0,t) &= 2, \quad u(1,t)=1
\end{aligned}
$$

35. 热力学方程的另一个重要的表达形式为如下的 Neumann 边界值问题：

$$
\begin{aligned}
u_t &= u_{xx} \qquad t>0,\ 0\leqslant x\leqslant 1\\
u(0,x) &= f(x) \qquad 0\leqslant x\leqslant 1\\
u_x(0,t) &= 0, \quad u_x(1,t)=0
\end{aligned}
$$

该问题代表了标准的热力学方程，这里，$u(x,t)$表示单位长圆棍在t时刻x点处的温度。$f(x)$表示x点处的初始温度（在$t=0$时刻）。$x=0$ 和$x=1$处的边界条件$u_x=0$的物理意义是，在端点处没有热量溢出（即圆棍在端点处是绝热的）。利用本章开始时描述的解题步骤，证明该问题的通解为：

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{-(k\pi)^2 t}\cos(k\pi x)$$

这里的a_k是f在区间$0\leqslant x\leqslant 1$上的傅里叶余弦系数。利用该公式，计算当$f(x)=x^2-x$时的解，此时$0\leqslant x\leqslant 1$。

36. 本题的目的是证明 Poisson 公式：如果$f(t)$是$-\pi\leqslant t\leqslant \pi$上的分段光滑函数，则

$$u(r,\phi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\frac{1-r^2\,dt}{1-2\cos(\phi-t)+r^2} \tag{1.41}$$

对于$0\leqslant r\leqslant 1$，$0\leqslant \phi\leqslant 2\pi$，在单位圆$x^2+y^2=1$上（极坐标形式为：$\{r<1\}$），

解 Laplaces 方程：

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{1.42}$$

边界值为$u(r=1,\phi)=f(\phi)$, $-\pi \leqslant \phi \leqslant \pi$。按照下列步骤，就可得到 Possion 公式。

(a) 证明函数 $u(x,y)=(x+iy)^n$, $n=0,1,2,\cdots$ 是 Laplaces 方程的解。利用复数表示法$z=x+iy$，该解还可以写为$u(z)=z^n$。

(b) 证明任何形如$\sum_{n=-N}^{N} A_n z^n$的有限和式是 Laplaces 方程的解。证明，对于$|z|=1$，如果无限级数$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n z^n$（即$|N| \to \infty$）一致绝对收敛，则在$\{|z|<1\}$上，该无限级数也是Laplaces方程的解。以极坐标的形式$z=re^{i\phi}$写出该函数。

(c) 为解Laplaces方程，我们必须找到形如$u(r,\phi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n r^{|n|} e^{in\phi}\, u(r,\phi)$，边界条件为$u(r=1,\phi)=f(\phi)$的解。证明，如果$A_n$是$f$的复数形式的傅里叶系数，则边界条件满足。

(d) 利用复傅里叶系数公式，证明，如果f为实值函数，则$A_{-n}=\overline{A_n}$。利用此结论，可以将上一步的解写做：

$$u(r,\phi)=\frac{1}{2\pi}\mathrm{Re}\left\{\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[2\left(\sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{in(\phi-t)}\right)-1\right]\right\}$$

(e) 利用等比级数公式，将上一步的解写做：

$$u(r,\phi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)P(r,\phi-t)\,dt$$

这里：

$$P(r,u)=\mathrm{Re}\{\frac{2}{1-re^{iu}}-1\}$$

(f) 将p重新写为：

$$P(r,u)=\frac{1-r^2}{1-2r\cos u+r^2}$$

利用该公式以及前面关于u的积分表达式，就可以得到(1.41)式。

第2章 傅里叶变换

本章将详细地讨论傅里叶变换及其逆变换 傅里叶变换可以看做是傅里叶级数的连续形式。傅里叶级数把定义在$[-\pi, \pi]$上的信号分解为频率为整数倍关系的谐波分量组合、相应地，傅里叶变换将一个无限时宽的信号分解为频率为λ的一系列频率分量，其中λ可以是任意实数（甚至是复数）。不仅傅里叶变换本身具有重要的意义，而且本章所讨论的内容对于后续章节中小波的构造也是非常重要的。

2.1 傅里叶变换的通俗描述

2.1.1 傅里叶逆定理

本节给出了傅里叶变换及其逆变换的通俗定义。严格的描述参见附录A。

为得到傅里叶变换的具体形式，首先考虑定义在$-l \leqslant x \leqslant l$上的函数的傅里叶级数展开、然后令$l$趋于无穷。由定理1.20（令$a = l$）可知，定义在$-l \leqslant x \leqslant l$上的函数有如下形式的傅里叶级数：

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{in\pi x/l}$$

其中，

$$\alpha_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t) e^{-in\pi t/l}\, dt$$

若函数f定义在整个实轴上，可以令l趋于无穷，观察此时上面公式的变化。将α_n的表示式代入前面的和式，得到：

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{l\mapsto\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t) e^{-in\pi t/l}\, dt \right) e^{in\pi x/l} \right] \\ &= \lim_{l\mapsto\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t) e^{in\pi(x-t)/l}\, dt \right] \end{aligned}$$

我们的目标是将右边的和式整理为积分的黎曼和形式．为此，令 $\lambda_n=\frac{n\pi}{l}$，$\Delta\lambda=\lambda_{n+1}-\lambda_n=\frac{\pi}{l}$，我们有：

$$f(x)=\lim_{l\mapsto\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-l}^{l}f(t)e^{\lambda_n i(x-t)}\,dt\right]\Delta\lambda \tag{2.1}$$

令

$$F_l(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-l}^{l}f(t)e^{\lambda i(x-t)}\,dt$$

则（2.1）式中的和式为：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_l(\lambda_n)\Delta\lambda$$

上式类似于积分 $\int_{-\infty}^{\infty}F_l(\lambda)\,d\lambda$ 的黎曼和式的定义。当 l 趋于无穷，$\Delta\lambda$ 趋于 0，这样 $\Delta\lambda$ 就成为积分式 $\int_{-\infty}^{\infty}F_l(\lambda)\,d\lambda$ 中的 $d\lambda$。所以（2.1）式变成：

$$f(x)=\lim_{l\mapsto\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F_l(\lambda)\,d\lambda$$

当 $l\mapsto\infty$ 时，$F_l(\lambda)$ 即成为积分 $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{i\lambda(x-t)}\,dt$，因此有：

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{i\lambda(x-t)}\,dt\,d\lambda$$

或

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\lambda t}\,dt\right)e^{i\lambda x}\,d\lambda \tag{2.2}$$

将圆括号中的部分记为 $\widehat{f}(\lambda)$，即：

$$\widehat{f}(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\lambda t}\,dt$$

函数 $\widehat{f}(\lambda)$ 称为 f 的傅里叶变换（的复数形式），于是（2.3）式成为：

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(\lambda)e^{i\lambda x}\,d\lambda$$

由于上式将函数 $f(x)$ 表示为其傅里叶变换的积分形式，所以通常称上式为傅里叶逆变换式。

上面的论述概括为如下定理。

定理 2.1　若f是连续可微的，且$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,dt<\infty$，则有：

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(\lambda)e^{i\lambda x}\,d\lambda \tag{2.3}$$

其中函数f的傅里叶变换$\widehat{f}(\lambda)$由下式给出：

$$\widehat{f}(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\lambda t}\,dt$$

由于没有对其几个关键步骤进行证明，例如积分$\int_{-\infty}^{\infty}F_l(\lambda)\,d\lambda$的收敛性问题，所以以上的讨论是不严格的。同讨论傅里叶级数时（见定理1.28）的情况类似，若函数$f(x)$存在间断点，如阶梯函数，那么间断点处的值用其左、右极限的平均值[即$(f(x+0)+f(x-0))/2$]代替后，上式仍然成立。关于这些结论的严格证明参见附录A。

为使傅里叶变换$\widehat{f}(\lambda)$有意义，定理 2.1 中的假设$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,dt<\infty$是必需的，即：

$$\begin{aligned}|\widehat{f}(\lambda)| &\leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)e^{-i\lambda t}|\,dt\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,dt \quad \text{since } |e^{-i\lambda t}|=1\\ &< \infty\end{aligned}$$

与傅里叶级数的比较。函数f的傅里叶变换的复数形式及其相应的逆变换，类似于区间$-l\leqslant x\leqslant l$上函数f的傅里叶级数的复数形式：

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{f}_n e^{\frac{in\pi}{l}x} \tag{2.4}$$

其中，

$$\widehat{f}_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)e^{-\frac{in\pi}{l}t}\,dt$$

傅里叶逆变换式（2.3）中的变量λ所起的作用与（2.4）式中的$\frac{n\pi}{l}$是一样的。（2.4）式中n从$-\infty$到∞的求和，由（2.3）式中λ从$-\infty$到∞的积分所取代。也就是说，由$\widehat{f}(\lambda)$式中的积分取代了$\widehat{f}_n$式中的和式。$\widehat{f}_n$在$[-l,\ l]$上的积分与$\hat{f}(\lambda)$在$(-\infty,\ \infty)$上的积分类似。傅里叶级数展开中的$\hat{f}_n$表示了频率为n的分量，同样地，傅里叶变换中的$\hat{f}(\lambda)$表示了频率为λ的分量。如果函数f是定义在有限区间上的，则f的傅里叶级数就是将f分解为频率离散的各个分量（即$\hat{f}_n$，n包括全体整数）。对于定义在无

限区间上的函数，分量间的频率是连续变化的，即λ定义在全体实数上。为更好地理解以上的讨论，请见下面的几个例子.

2.1.2 例子

例 2.2

计算图 2.1 给出的矩形波的傅里叶变换：

$$f(t)=\begin{cases}1 & -\pi\leqslant t\leqslant\pi\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

我们得到$f(t)e^{-i\lambda t}=f(t)(\cos\lambda t-i\sin\lambda t)$。因为$f$是偶函数，所以$f(t)\sin(\lambda t)$是奇函数，而且它在整个实轴上的积分为 0。因此，$f$的傅里叶变换简化为：

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\lambda)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos(\lambda t)\,dt\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(\lambda t)\,dt\\&=\frac{\sqrt{2}\sin(\lambda\pi)}{\sqrt{\pi}\lambda}\end{aligned}$$

如图 2.2 所示。

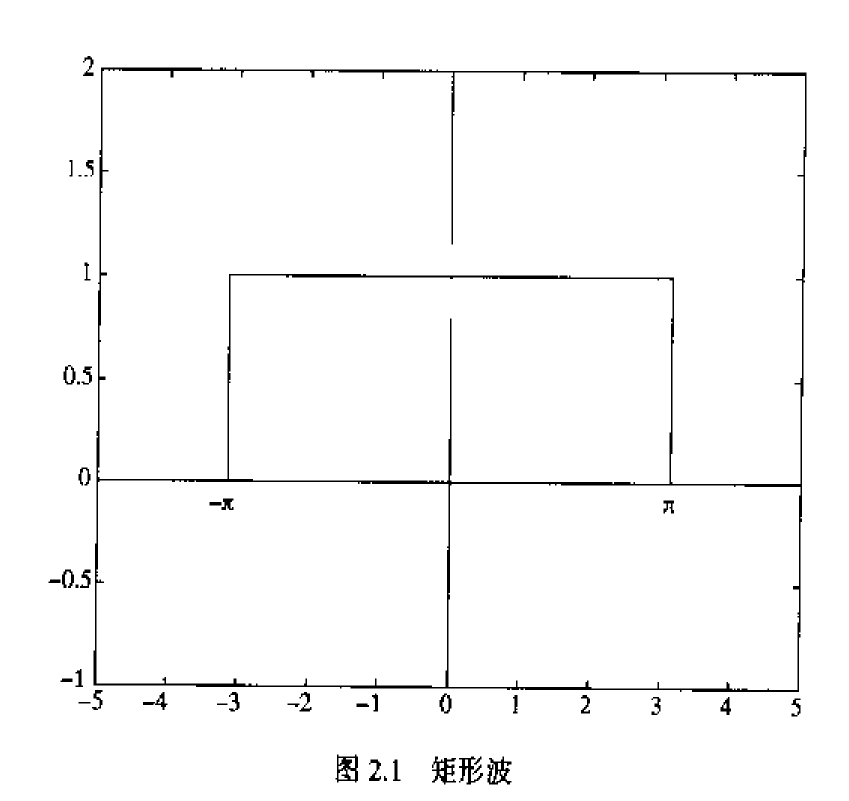


图 2.1 矩形波

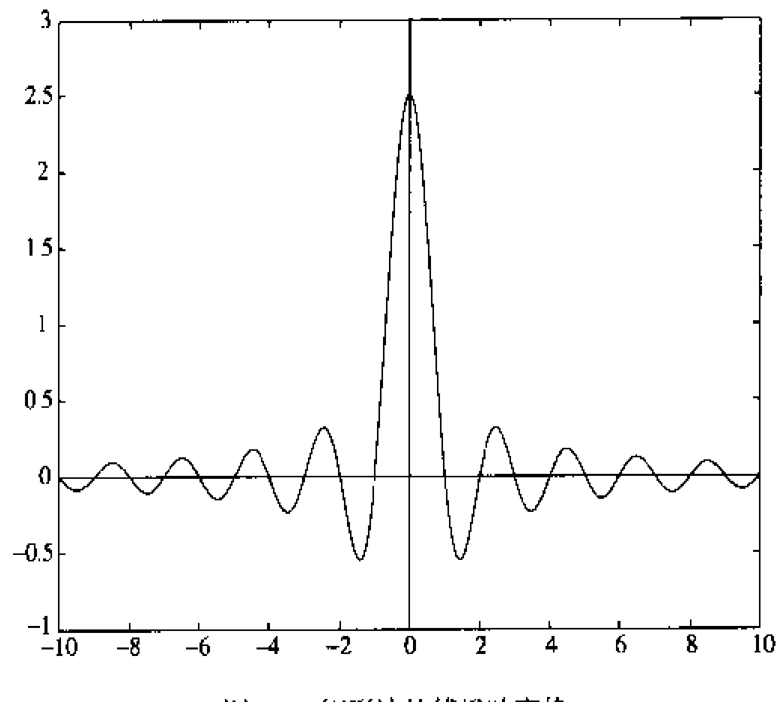


图 2.2　矩形波的傅里叶变换

如前所述，傅里叶变换$\widehat{f}(\lambda)$代表了频率为λ的分量。在本例中，f为分段常量函数。因为常量代表零频，因此可以预计$\widehat{f}(\lambda)$的最大值出现在λ等于0附近。$\widehat{f}$的图形清楚地说明了这点

例 2.3

令

$$f(t)=\begin{cases}\cos 3t & -\pi\leqslant t\leqslant\pi\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

（见图 2.3）。

由于f是偶函数，所以其傅里叶变换只有余弦部分：

$$\widehat{f}(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos(\lambda t)\,dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(3t)\cos(\lambda t)\,dt$$

上面的积分过程留作习题[把下面的两个等式加起来，令$u=3t$和$v=\lambda t$，然后积分]。

$$\cos(u+v)=\cos u\cos v-\sin u\sin v$$
$$\cos(u-v)=\cos u\cos v+\sin u\sin v$$

结果是：

$$\widehat{f}(\lambda)=\frac{\sqrt{2}\lambda\sin(\lambda\pi)}{\sqrt{\pi}(9-\lambda^2)}$$

如图 2.4 所示

注意到其傅里叶变换的峰值出现在$\lambda=3$和$\lambda=-3$处. 因为在区间$-\pi\leqslant t\leqslant\pi$上，$f(t)=\cos(3t)$的振荡频率为 3，所以峰值出现的位置当在意料之中。

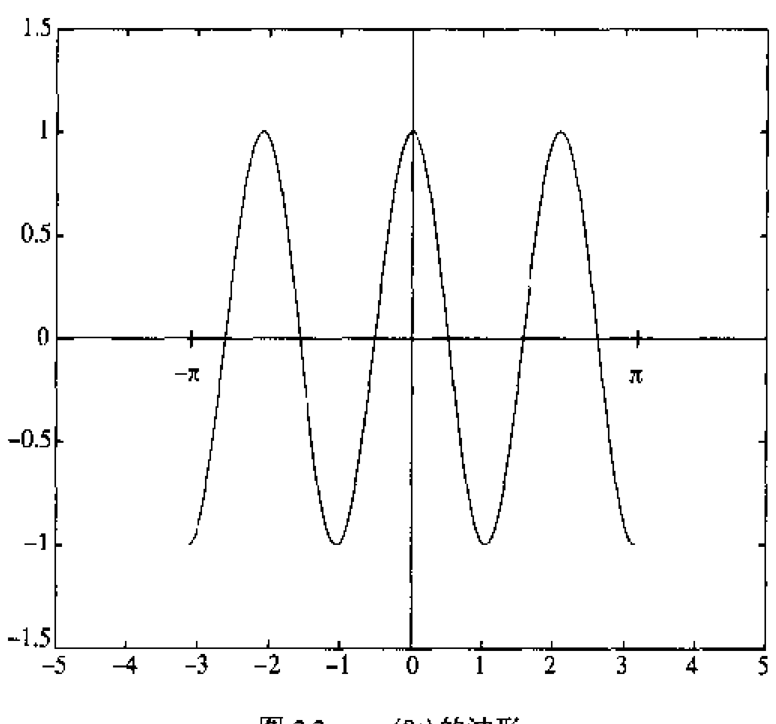


图 2.3 cos(3t)的波形

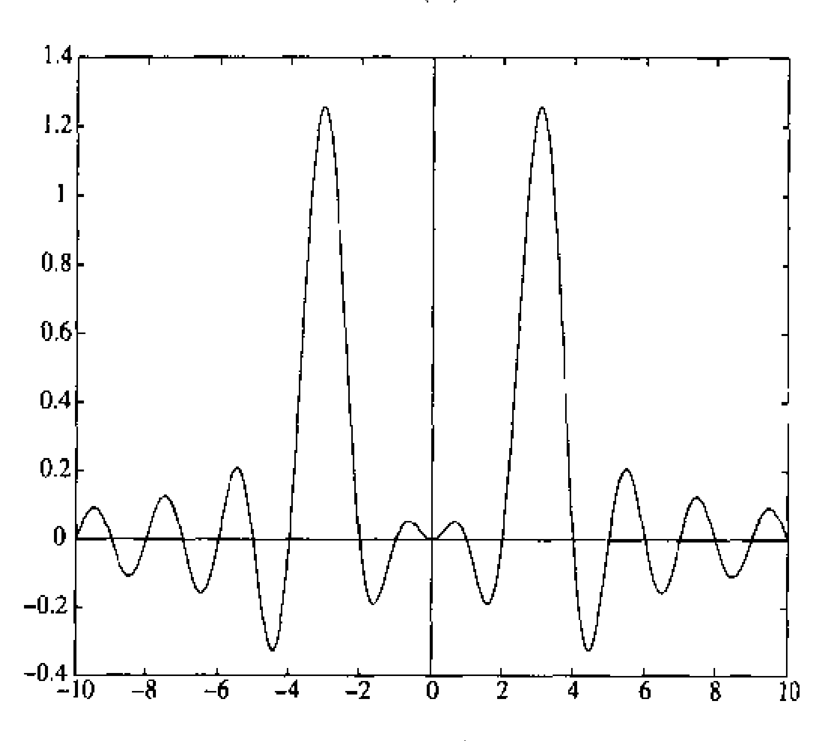


图 2.4 cos(3t)的傅里叶变换

例 2.4

令

$$f(t)=\begin{cases}\sin 3t & -\pi\leqslant t\leqslant\pi\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

由于f是奇函数，则其傅里叶变换只有正弦部分（即只有虚部）。其变换为：

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\lambda)&=\frac{-i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin(\lambda t)\,dt\\&=\frac{-i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(3t)\sin(\lambda t)\,dt\\&=\frac{-3\sqrt{2}i\sin(\lambda\pi)}{\sqrt{\pi}(9-\lambda^2)}\end{aligned}$$

例 2.5

本例是一个三角波，如图 2.5 所示。其表示式为：

$$f(t)=\begin{cases}t+\pi & -\pi\leqslant t\leqslant 0\\ \pi-t & 0<t\leqslant\pi\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

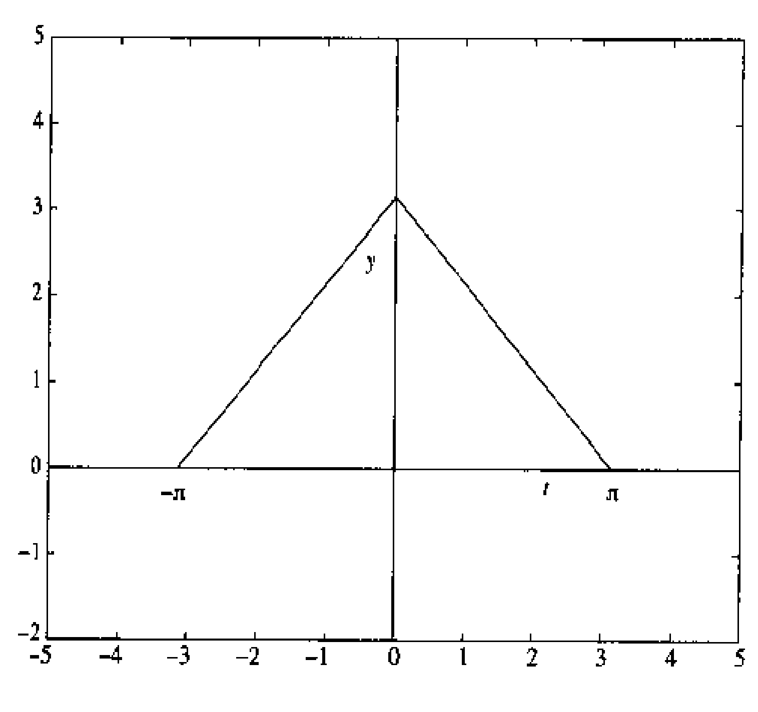


图 2.5　三角波

该函数为偶函数，所以其傅里叶变换为：

$$\widehat{f}(\lambda)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty f(t)\cos(\lambda t)\,dt=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\pi(\pi-t)\cos(\lambda t)\,dt$$

利用分部积分得到最终的积分结果为：

$$\widehat{f}(\lambda)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{(1-\cos(\lambda\pi))}{\lambda^2}$$

如图 2.6 所示。

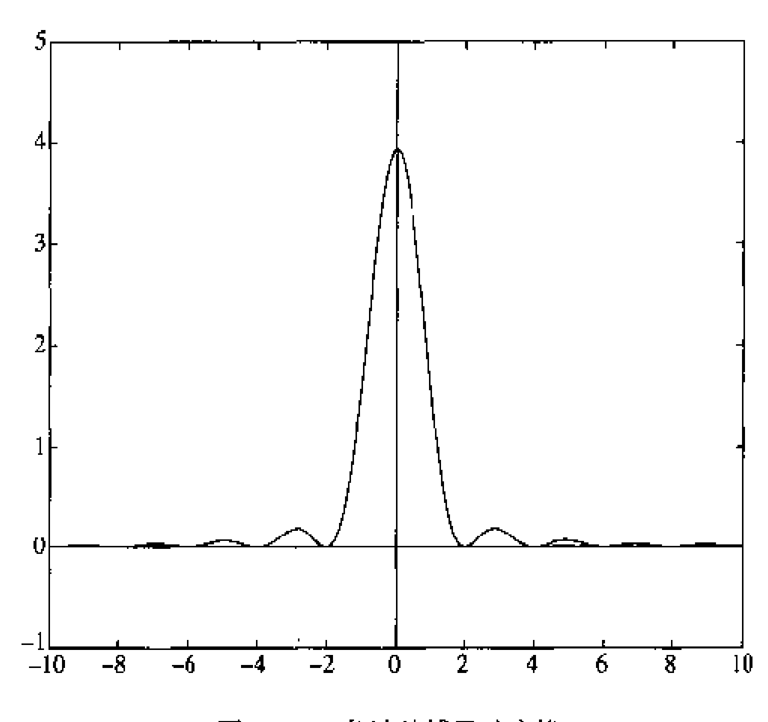


图 2.6 三角波的傅里叶变换

注意到例 2.4 和例 2.5 中的傅里叶系数，当$\lambda\mapsto\infty$时，以$1/\lambda^2$的速率衰减，它们的衰减速率要比例 2.2 和例 2.3 中以$1/\lambda$的衰减率快。例 2.4 和例 2.5 的函数是连续的，所以其傅里叶系数衰减得比较快。同第 1 章中讨论过的情况做比较，例 1.9 中不连续函数的傅里叶系数a_n和b_n以$1/n$的速率衰减，而例 1.10 中连续函数的傅里叶变换系数以$1/n^2$的速率衰减。

2.2 傅里叶变换的性质

2.2.1 基本性质

本节将讨论傅里叶变换的几个基本性质。首先，引入f的傅里叶变换的另一个记号：

$$\mathcal{F}[f](\lambda)=\widehat{f}(\lambda)$$

当讨论傅里叶变换算子的性质时，这个记号的优越性就体现出来了。傅里叶变换算子 F 可以看做是一个映射，它的定义域和值域均是定义在实轴上的复值函数空间。F 的输入是一个函数，例如 f，返回的是另一个函数 $\mathcal{F}[f]=\widehat{f}$，即它的输出。

类似地，定义傅里叶变换的逆算子为：

$$\mathcal{F}^{-1}[f](x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)e^{i\lambda x}\,d\lambda$$

定理 2.1 意味着 $\mathcal{F}^{-1}$ 是 F 的逆：

$$\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]]=f \tag{2.5}$$

因为

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]](x)&=\mathcal{F}^{-1}[\widehat{f}](x) && \text{由 } \mathcal{F} \text{ 的定义}\\ &=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(\lambda)e^{i\lambda x}\,d\lambda && \text{由 } \mathcal{F}^{-1}[\widehat{f}] \text{ 的定义}\\ &=f(x) && \text{由定理 2.1}\end{aligned}$$

下面的定理给出了傅里叶变换及其逆变换的部分性质，余下的性质在习题中给出[1]。

定理 2.6　令 f 和 g 是定义在实轴上的可微函数，并且对于大的 $|t|$，有 $f(t)=0$。下列性质成立。

（1）傅里叶变换及其逆变换算子是线性算子，也就是说，对于任意常数 c，有：

$$\mathcal{F}[f+g]=\mathcal{F}[f]+\mathcal{F}[g] \text{ 和 } \mathcal{F}[cf]=c\mathcal{F}[f]$$
$$\mathcal{F}^{-1}[f+g]=\mathcal{F}^{-1}[f]+\mathcal{F}^{-1}[g] \text{ 和 } \mathcal{F}^{-1}[cf]=c\mathcal{F}^{-1}[f]$$

（2）f 与 t^n 乘积的傅里叶变换由下式给出：

$$\mathcal{F}[t^n f(t)](\lambda)=i^n\frac{d^n}{d\lambda^n}\{\mathcal{F}[f](\lambda)\}$$

（3）f 与 λ^n 乘积的傅里叶逆变换由下式给出：

$$\mathcal{F}^{-1}[\lambda^n f(\lambda)](t)=(-i)^n\frac{d^n}{dt^n}\{\mathcal{F}^{-1}[f](t)\}$$

（4）n 阶导数的傅里叶变换为：

① 以下，作者认为 $b>0$——译者注。

$$\mathcal{F}[f^{(n)}](\lambda) = (i\lambda)^n \mathcal{F}[f](\lambda)$$

[其中 $f^{(n)}$ 代表 f 的 n 阶导数]。

（5）n 阶导数的傅里叶逆变换为：

$$\mathcal{F}^{-1}[f^{(n)}](t) = (-it)^n \mathcal{F}^{-1}[f](t)$$

（6）平移的傅里叶变换为：

$$\mathcal{F}[f(t-a)](\lambda) = e^{-i\lambda a}\mathcal{F}[f](\lambda)$$

（7）傅里叶变换的比例性质为：

$$\mathcal{F}[f(bt)](\lambda) = \frac{1}{b}\mathcal{F}[f](\frac{\lambda}{b})$$

（8）若 $t < 0$ 时有 $f(t) = 0$，则：

$$\mathcal{F}[f](\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{L}[f](i\lambda)$$

其中 $\mathcal{L}[f]$ 为 f 的拉普拉斯变换，即：

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty f(t)e^{-ts}\,dt$$

证明 下面依次证明上述各条性质。

（1）由于积分满足线性，则傅里叶变换具有线性性质，证明如下：

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f+g](\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}[f(t)+g(t)]e^{-i\lambda t}\,dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\lambda t}\,dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i\lambda t}\,dt \\ &= \mathcal{F}[f](\lambda) + \mathcal{F}[g](\lambda)\end{aligned}$$

$\mathcal{F}[cf] = c\mathcal{F}[f]$ 的证明是类似的。同样地，可以证明傅里叶逆变换的线性性质。

（2）、（3）对于 f 与 t^n 乘积的傅里叶变换，有：

$$\mathcal{F}[t^n f(t)](\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} t^n f(t)e^{-i\lambda t}\,dt$$

利用下面的等式：

$$t^n f(t)e^{-i\lambda t} = (i)^n \frac{d^n}{d\lambda^n}\{f(t)e^{-i\lambda t}\}$$

得到

$$\mathcal{F}[t^n f(t)](\lambda) = (i)^n \frac{d^n}{d\lambda^n}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\lambda t}\,dt\right\}$$
$$= (i)^n \frac{d^n}{d\lambda^n}\{\mathcal{F}[f](\lambda)\}$$

傅里叶逆变换的相应性质的证明类似。

（4）、（5）对于f的n阶导数的傅里叶变换，有：

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(t)](\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f^{(n)}(t)e^{-i\lambda t}\,dt$$

对上式进行分部积分，即

$$\int_{-\infty}^{\infty} u\,dv = uv\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} v\,du$$

其中，$dv = f^{(n)}$，$u = e^{-i\lambda t}$。以下将看到，分部积分过程能够把对f的求导转换为对$e^{-i\lambda t}$求导。因为由假设，f在∞和$-\infty$处消失，所以不存在上、下界。于是有：

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f^{(n)}(t)e^{-i\lambda t}\,dt = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f^{(n-1)}(t)\frac{d}{dt}\{e^{-i\lambda t}\}\,dt \quad \text{(by parts)}$$
$$= (i\lambda)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f^{(n-1)}(t)e^{-i\lambda t}\,dt$$

注意，分部积分把对f的求导阶数减掉一阶［$f^{(n)}$成为$f^{(n-1)}$］，同时得到一个因子$i\lambda$。把该过程再重复$n-1$次，得：

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f^{(n)}(t)e^{-i\lambda t}\,dt = (i\lambda)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\lambda t}\,dt$$
$$= (i\lambda)^n \mathcal{F}[f](\lambda)$$

证毕。傅里叶逆变换的相应性质的证明类似。

（6）、（7）平移和比例性质可以结合成如下的形式，然后在一块证明：

$$\mathcal{F}[f(bt-a)](\lambda) = \frac{1}{b}e^{-i\lambda a/b}\mathcal{F}[f](\lambda/b) \tag{2.6}$$

这个等式可以通过变量代换而获得：

$$\mathcal{F}[f(bt-a)](\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(bt-a)e^{-i\lambda t}\,dt$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-i\lambda\left(\frac{s+a}{b}\right)}\,\frac{ds}{b}$$

其中第 2 个等式是通过变量代换$s = bt - a$而获得的［因此得到$t = (s+a)/b$和

$dt=\frac{ds}{b}$]。右边的指数可写为：

$$e^{-i\lambda(\frac{s+a}{b})}=e^{\frac{-i\lambda a}{b}}e^{-i\frac{\lambda}{b}s}$$

从而有：

$$\mathcal{F}[f(bt-a)](\lambda)=e^{\frac{-i\lambda a}{b}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(s)e^{-i\frac{\lambda}{b}s}\frac{ds}{b}$$

$$=e^{\frac{-i\lambda a}{b}}\frac{1}{b}\mathcal{F}[f](\frac{\lambda}{b})$$

（8）定理的最后一条是有关傅里叶变换与拉普拉斯变换之间关系的，从两者的定义可以方便地推出，留待习题中。

至此定理全部证明完毕。

例 2.7

利用例 2.4 中的函数来验证定理 2.6 中的第（4）条性质：

$$f(t)=\begin{cases}\sin 3t & -\pi\leqslant t\leqslant\pi\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

其傅里叶变换为：

$$\widehat{f}(\lambda)=\frac{-3\sqrt{2}i\sin(\lambda\pi)}{\sqrt{\pi}(9-\lambda^2)}$$

f 的导数为 $3\cos 3t$，$-\pi\leqslant t\leqslant\pi$，它刚好是例2.3 所定义的函数乘以3，因此，由例2.3 的结果有：

$$\widehat{f'}(\lambda)=\frac{3\sqrt{2}\lambda\sin(\lambda\pi)}{\sqrt{\pi}(9-\lambda^2)}\tag{2.7}$$

由定理 2.6 中第（4）条（此时$n=1$）得：

$$\widehat{f'}(\lambda)=i\lambda\widehat{f}(\lambda)=-i\lambda\frac{3\sqrt{2}i\sin(\lambda\pi)}{\sqrt{\pi}(9-\lambda^2)}$$

这与（2.7）式的结论是一致的。

例 2.8

本例验证比例性质。

$$\mathcal{F}[f(bt)](\lambda)=\frac{1}{b}\mathcal{F}[f](\frac{\lambda}{b})\tag{2.8}$$

如果$b > 1$，则$f(bt)$相对$f(t)$是压缩了。同时$f(bt)$的主频率比$f(t)$的提高了b倍。例2.4中的函数可以很好地验证这一性质：

$$f(t) = \begin{cases} \sin 3t & -\pi \leqslant t \leqslant \pi \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

如图 2.7 所示。$f(2t)$如图 2.9 所示。注意，$f(2t)$的频率为$f(t)$的 2 倍。

提高信号的频率必定要展宽其频谱。上例中，$f(t)$的主频为 3，而$f(2t)$的主频为 6。这样$|\widehat{f}(\lambda)|$的最大值出现在$\lambda = 3$处（见图 2.8），而$f(2t)$的傅里叶变换的最大值出现在$\lambda = 6$处（见图 2.10）。所以，图 2.10 比图 2.8 展宽 1 倍。同时注意到，$\widehat{f(\lambda/2)}$的图也比$\widehat{f(\lambda)}$的图展宽 1 倍。

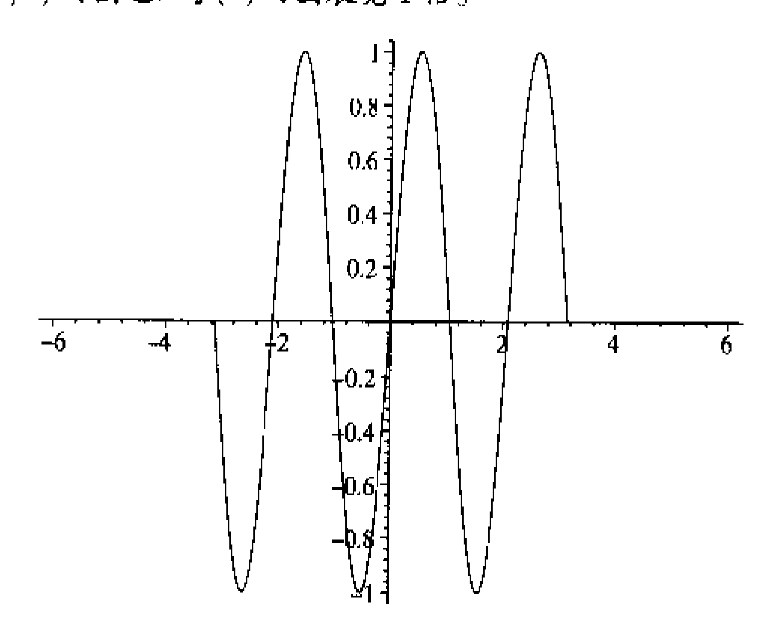


图 2.7　sin(3t)的波形，$-\pi \leqslant t \leqslant \pi$

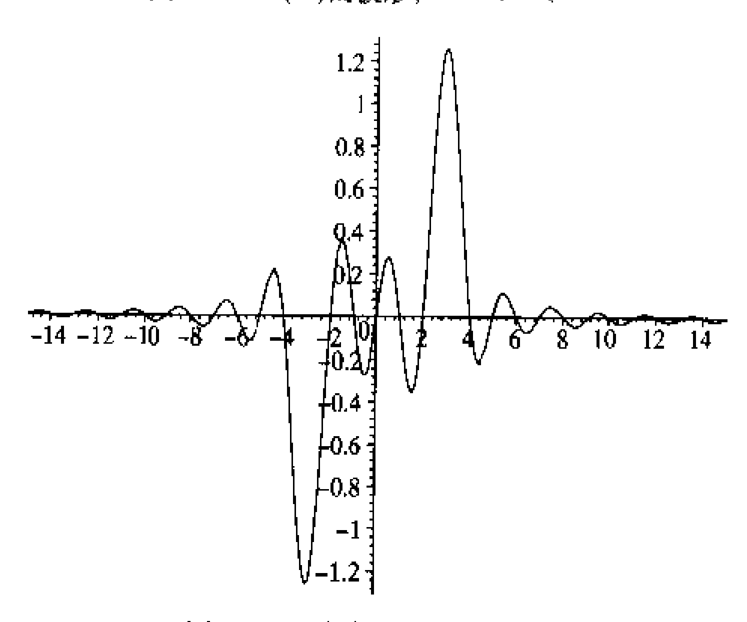


图 2.8　sin(3t)的傅里叶变换

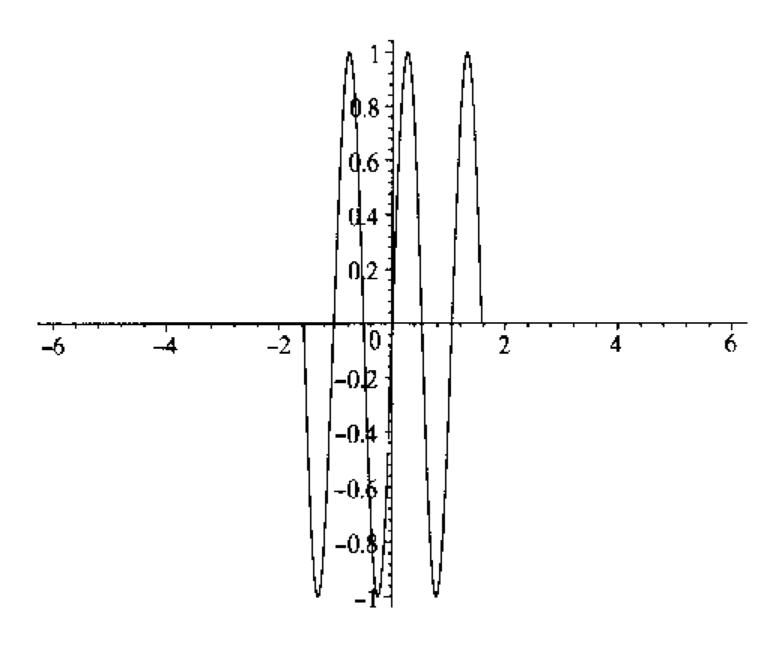


图 2.9 $\sin(3t)$的波形，$-\pi/2 \leqslant t \leqslant \pi/2$

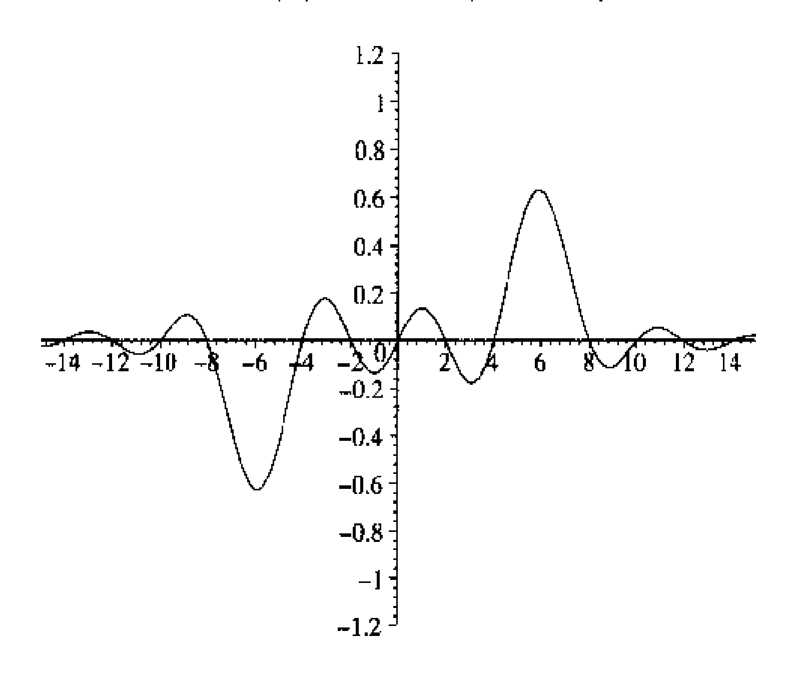


图 2.10 $\sin(6t)$的傅里叶变换

小结一下。当$b > 1$时，以几何方式解释了(2.8)式的含义：信号在时域受到压缩，将使得其频域展宽，因此$\widehat{f}(\lambda)$的图形得到扩展。当$0 < b < 1$时，信号$f(bt)$在时域被展宽，使得其频域压缩，因此$\widehat{f}(\lambda)$的图形受到压缩。

2.2.2 卷积的傅里叶变换

接下来我们研究在卷积运算中傅里叶变换表现如何。首先，给出两个函数卷积运算的定义。

定义 2.9　假设f和g都是平方可积函数，则f和g的卷积$f*g$定义为：

$$(f*g)(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t-x)g(x)\,dx$$

上式等价于：

$$(f*g)(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)g(t-x)\,dx$$

（通过变量代换$y=t-x$，然后再将y代换为x）。

两个函数卷积的傅里叶变换满足如下定理。

定理 2.10　设f和g都是平方可积函数，则有：

$$\mathcal{F}[f*g]=\sqrt{2\pi}\widehat{f}\cdot\widehat{g} \tag{2.9}$$

$$\mathcal{F}^{-1}[\widehat{f}\cdot\widehat{g}]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}f*g \tag{2.10}$$

证明　为了得到第 1 个等式，利用傅里叶变换和卷积的定义：

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f*g](\lambda)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(f*g)(t)e^{-i\lambda t}\,dt\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(t-x)g(x)\,dx\,e^{-i\lambda t}\,dt\end{aligned}$$

因为$e^{-i\lambda t}=e^{-i\lambda(t-x)}e^{-i\lambda x}$，交换积分顺序，得：

$$\mathcal{F}[f*g](\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(t-x)e^{-i\lambda(t-x)}g(x)\,dt\,e^{-i\lambda x}\,dx$$

令$s=t-x$，得：

$$\mathcal{F}[f*g](\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(s)e^{-i\lambda s}\,ds\,g(x)e^{-i\lambda x}\,dx$$

右边可以重新写为：

$$\sqrt{2\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(s)e^{-i\lambda s}\,ds\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}g(x)e^{-i\lambda x}\,dx\right)$$

它等于$\sqrt{2\pi}\widehat{f}(\lambda)\widehat{g}(\lambda)$，(2.9) 式证毕。

(2.10) 式的证明应用了 (2.9) 式和傅里叶逆变换公式：

$$\sqrt{2\pi}\mathcal{F}^{-1}[\widehat{f}\widehat{g}] = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}(f * g)] \quad \text{由（2.9）式}$$
$$= f * g \quad \text{由定理 2.1}$$

（2.10）式证毕。

2.2.3 傅里叶变换的伴随算子

在 0.6.2 节中，我们介绍过线性算子的伴随算子，其定义为：对于内积空间V和W上的线性算子$T: V \mapsto W$，若

$$\langle v, T^*(w)\rangle_V = \langle T(v), w\rangle_W$$

则$T^*: W \mapsto V$为T的伴随算子。下面的定理说明了傅里叶变换的伴随算子就是傅里叶逆变换。

定理 2.11 设f和g都是平方可积的，则有：

$$\langle \mathcal{F}[f], g\rangle_{L^2} = \langle f, \mathcal{F}^{-1}[g]\rangle_{L^2}$$

证明 根据L^2空间内积的定义，我们有：

$$\langle \mathcal{F}[f], g\rangle_{L^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\lambda)\overline{g(\lambda)}\,d\lambda$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\lambda t}\,dt\,\overline{g(\lambda)}\,d\lambda \quad \text{由 } \widehat{f} \text{ 的定义}$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{g(\lambda)e^{i\lambda t}}\,d\lambda\right)dt$$

（通过交换积分次序）。第 2 层（包含 g 的）积分的结果为$\overline{\mathcal{F}^{-1}[g](t)}$，因此，

$$\langle \mathcal{F}[f], g\rangle_{L^2} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{\mathcal{F}^{-1}[g](t)}\,dt = \langle f, \mathcal{F}^{-1}[g]\rangle_{L^2}$$

证毕。

2.2.4 Plancherel 公式

Plancherel 公式表明了傅里叶变换具有L^2空间的保范性。

定理 2.12： 设f和g都是平方可积的，则

$$\langle \mathcal{F}[f], \mathcal{F}[g]\rangle_{L^2} = \langle f, g\rangle_{L^2} \tag{2.11}$$

$$\langle \mathcal{F}^{-1}[f], \mathcal{F}^{-1}[g] \rangle_{L^2} = \langle f, g \rangle_{L^2} \tag{2.12}$$

特别地，

$$\|\mathcal{F}[f]\|_{L^2} = \|f\|_{L^2} \tag{2.13}$$

证明　利用定理 2.11 和定理 2.1 的结果可以推出（2.11）式，即：

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}[f], \mathcal{F}[g] \rangle_{L^2} &= \langle f, \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}[g] \rangle_{L^2} \quad \text{（定理 2.11）} \\ &= \langle f, g \rangle_{L^2} \quad \text{（定理 2.1）} \end{aligned}$$

证毕。用类似的方法可以得到（2.12）式。在（2.11）式中，令 $f = g$，则得（2.13）式。

注释　等式 $\|\mathcal{F}(f)\| = \|f\|$ 类似于定理 1.40 中的（1.38）式，$\|\mathcal{F}(f)\| = \|f\|$ 通常称为 Parseval 等式。该式还有下面的表示形式。对于一个定义在 $[-\pi, \pi]$ 上的函数 f，令 $\mathcal{F}(f)(n)$ 是它的第 n 个傅里叶系数（只是将比例因子由 $1/2\pi$ 变为 $1/\sqrt{2\pi}$）：

$$\mathcal{F}(f)(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int}\, dt$$

（1.38）式可重写为：

$$\|\mathcal{F}(f)\|_{l^2}^2 = \|f\|_{L^2[-\pi,\pi]}^2$$

上式和（2.13）式类似，只是（2.13）式是整个实轴上的 L^2 范数，而上式是 l^2 和 $L^2[-\pi, \pi]$ 范数。在表示成傅里叶级数的情况下，Plancherel 公式表明在时域计算得到的信号能量 $\|f\|_{L^2}^2$ 与在频域计算得到的信号能量 $\|\widehat{f}\|_{L^2}^2$ 是相等的。

2.3　线性滤波器

2.3.1　时不变滤波器

傅里叶变换对于滤波器的设计可起到很重要的作用。滤波器可以被看做是一个“黑箱”，信号输入到滤波器内，进行处理后输出一个变换后的信号。信号去噪装置就是一个典型的滤波器。

从数学的观点看，信号即是一函数 $f : R \mapsto C$，通常是分段连续的。滤波器可以看做是一个变换 L，它将信号 f 映射为另一个信号 $\tilde{f}$。若是线性滤波器，则变换 L 必须满足下列两条性质：

- 加性：$L[f+g] = L[f] + L[g]$
- 齐性：$L[cf] = cL[f]$，其中 c 为常数

绝大多数滤波器通常都满足的另一个性质是时不变性。举一个通俗的例子，假如我们在今天下午3点放一张旧的、有杂音的唱片，若将声音信号通过一个去噪滤波器，马上会听到清晰的音乐；若明天上午10点放同一张唱片，用同样的滤波器，也将立刻听到同今天一样的音乐，这就是时不变性。为了使时不变性公式化，引入下面的记号：对函数$f(t)$和实数a，令$f_a(t)=f(t-a)$。于是，信号f在时间轴上平移了a个单位后的信号就是f_a。

定义 2.13 变换L（从信号到信号的映射）称为时不变的是指，对于任意的信号f和实数a，有$L[f_a](t)=(Lf)(t-a)$（或$L[f_a]=(Lf)_a$）。也就是说，若时延信号$f(t-a)$经变换后的输出等于输出信号的时延$(Lf)(t-a)$，则L是时不变的（见图 2.11）。

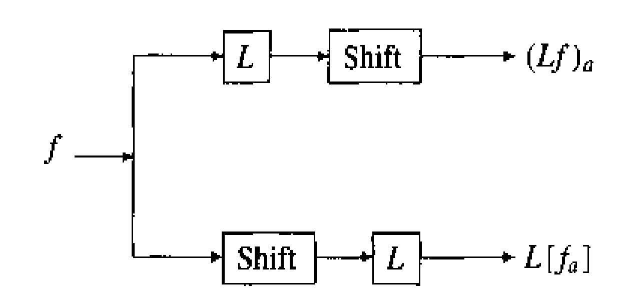


图 2.11 若上边的输出和下边的输出相等，则L是时不变的

例 2.14

设函数$l(t)$是有限支撑的[即$l(t)$在一个有限的区间外是0]，对于信号f，令

$$(Lf)(t)=(l*f)(t)=\int_{-\infty}^{\infty}l(t-x)f(x)\,dx \text{ 对每个 } t$$

线性算子L是时不变的，因为对于任意$a\in R$，有：

$$\begin{aligned}(Lf)(t-a)&=\int_{-\infty}^{\infty}l(t-a-x)f(x)\,dx\\&=\int_{-\infty}^{\infty}l(t-y)f(y-a)\,dy \quad (\text{令 } y=a+x)\\&=\int_{-\infty}^{\infty}l(t-y)f_a(y)\,dy\\&=L[f_a](t)\end{aligned}$$

这样，$(Lf)(t-a)=L[f_a](t)$，于是L是时不变的。

并不是所有的线性变换都有这个性质，例如下面的这个例子。

例 2.15

令

$$(Lf)(t) = \int_0^t f(\tau)\, d\tau$$

一方面，有：

$$\begin{aligned} L[f_a](t)) &= \int_0^t f(\tau - a)\, d\tau \\ &= \int_{-a}^{t-a} f(\hat{\tau})\, d\hat{\tau} \qquad \text{令 } \hat{\tau} = \tau - a \end{aligned}$$

另一方面，还有：

$$(Lf)(t-a) = \int_0^{t-a} f(\tau)\, d\tau$$

由于对于 $a \neq 0$，$L[f_a](t)$和$(Lf)(t-a)$是不同的，所以L不是时不变的。

下面的引理和定理说明了例 2.14 中的卷积是典型的时不变线性滤波器　首先来计算$L(e^{i\lambda t})$。

引理 2.16　设变换L是线性时不变的，令λ为任意固定实数，则存在函数h满足：

$$L(e^{i\lambda t}) = \sqrt{2\pi}\, \hat{h}(\lambda) e^{i\lambda t} \quad (t \text{ 是变量})$$

注释：注意到输入信号$e^{i\lambda t}$是一个频率为λ的（复值的）正弦信号，这个引理说明，时不变滤波器的输出是一个与输入信号具有相同频率的正弦信号。

证明　为了讲清楚基本概念，这里的证明有些不太规范。设$h^\lambda(t) = L(e^{i\lambda t})$，由于$L$是时不变的，则对于任意实数$a$，有：

$$L[e^{i\lambda(t-a)}] = h^\lambda(t-a) \tag{2.14}$$

同时，由于L是线性的，有：

$$\begin{aligned} L[e^{i\lambda(t-a)}] &= L[e^{-i\lambda a} e^{i\lambda t}] \\ &= e^{-i\lambda a} L[e^{i\lambda t}] \quad (L \text{ 是线性的}) \end{aligned}$$

于是，

$$L[e^{i\lambda(t-a)}] = e^{-i\lambda a} h^\lambda(t) \tag{2.15}$$

比较(2.14)式和(2.15)式，有：

$$h^{\lambda}(t-a)=e^{-i\lambda a}h^{\lambda}(t)$$

因为a是任意的，不妨令$a=t$，这样$h^{\lambda}(0)=e^{-i\lambda t}h^{\lambda}(t)$，从而马上可得到$h^{\lambda}(t)$，即：

$$L[e^{i\lambda t}]=h^{\lambda}(t)=h^{\lambda}(0)e^{i\lambda t}$$

令$\hat{h}(\lambda)=h^{\lambda}(0)/\sqrt{2\pi}$，则该引理的证明完毕。

函数$\hat{h}(\lambda)$决定了L，为了看清这一点，首先应用傅里叶逆定理(定理 2.1)：

$$f(t)=\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\lambda)e^{i\lambda t}d\lambda$$

然后两边同时应用L：

$$(Lf)(t)=L\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\lambda)e^{i\lambda t}d\lambda\right] \tag{2.16}$$

右边的积分可由黎曼和近似：

$$L\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\lambda)e^{i\lambda t}d\lambda\right]\approx L\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{j}\hat{f}(\lambda_j)e^{i\lambda_j t}\Delta\lambda\right] \tag{2.17}$$

由于L是线性的，则可以将变换L移到求和号内部：

$$L\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{j}\hat{f}(\lambda_j)e^{i\lambda_j t}\Delta\lambda\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{j}\hat{f}(\lambda_j)L\left[e^{i\lambda_j t}\right]\Delta\lambda \tag{2.18}$$

随着分段区间长度的缩小，该黎曼和变成了积分形式，于是由(2.16)、(2.17)和(2.18)式得到：

$$\begin{aligned}(Lf)(t)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\lambda)L[e^{i\lambda t}](t)\,d\lambda\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\lambda)\left(\sqrt{2\pi}\hat{h}(\lambda)\right)e^{i\lambda t}\,d\lambda \quad \text{由引理 2.16}\\&=\sqrt{2\pi}\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(\lambda)\hat{h}(\lambda)](t) \quad \text{由逆傅里叶变换的定义}\\&=(f*h)(t) \quad \text{由定理 2.10}\end{aligned}$$

虽然上面的论述不是很严格，但结果是正确的，而且此时对于变换L和所考虑的信号空间几乎没有限制[在 Stein 和 Weiss 所著的“傅里叶分析”(见参考文献[19])一

书中，给出了更详尽的论述]。上面的论述可概括为下面的定理。

定理 2.17　设变换L是线性时不变的，其作用的信号是分段连续的，则存在一个可积函数h，对信号空间中的所有元素f，满足：

$$L(f)=f*h$$

物理解释。 $h(t)$和$\hat{h}(\lambda)$都有其物理意义。假设$h(t)$是连续的，δ是一个小的正数。将L作用于下面的冲激信号：

$$f_\delta(t)=\begin{cases}1/(2\delta) & -\delta<t<\delta\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

如图 2.12 所示。若$\delta>0$，且δ很小，则f_δ表示一个幅度很大、持续时间很短的信号（如锤击产生的声音信号）。注意到$\int_{-\delta}^{\delta}f_\delta(t)\,dt=1$，把$L$作用于$f_\delta$后，有：

$$\begin{aligned}(Lf_\delta)(t)&=f_\delta*h(t)\\&=\int_{-\infty}^{\infty}f_\delta(\tau)h(t-\tau)\,d\tau\\&=\int_{-\delta}^{\delta}f_\delta(\tau)h(t-\tau)\,d\tau\ (\text{因为 } f_\delta(\tau)=0 \text{ 对 } |\tau|\geqslant\delta)\end{aligned}$$

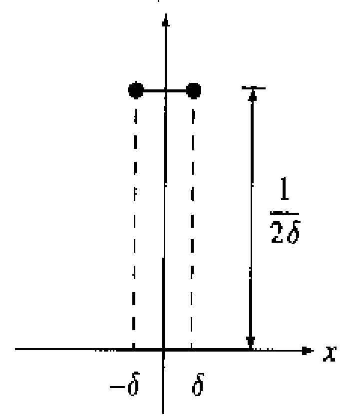


图 2.12　f_δ的图形

因为h是连续的，则对于$|\tau|\leqslant\delta$，$h(t-\tau)$近似为$h(t)$，因此，

$$(Lf_\delta)(t)\approx h(t)\underbrace{\int_{-\delta}^{\delta}f_\delta(\tau)\,d\tau}_{1}=h(t)$$

这样，$h(t)$就是将一个冲激信号通过L后的近似响应。基于此原因，称$h(t)$为冲激响

应函数.

我们已经得到$L[e^{i\lambda t}] = \sqrt{2\pi}\hat{h}(\lambda)e^{i\lambda t}$，这样，除去一个常数因子，$\hat{h}(\lambda)$就表示了$L$对单频信号$e^{i\lambda t}$的响应幅度，因此称$\hat{h}$为系统函数。

2.3.2 因果性和滤波器设计

设计一个时不变的滤波器等同于构造冲激函数h，因为由定理2.17可知，对于任一滤波器，可写为：

$$Lf = f * h$$

h的构造依赖于滤波器要完成的功能. 本节考虑一个抑制高频的滤波器，这种滤波器称为**低通滤波器**。

对$Lf = f * h$两边进行傅里叶变换，然后利用定理2.10得：

$$\widehat{L[f]}(\lambda) = \sqrt{2\pi}\hat{f}(\lambda)\hat{h}(\lambda)$$

无法实现的滤波器。假设我们希望滤波器完成的功能是，抑制掉信号f中所有大于截止频率λ_c的频率分量. 自然的思路是，让h的傅里叶变换在区间$-\lambda_c \leqslant \lambda \leqslant \lambda_c$以外为0：

$$\hat{h}_{\lambda_c}(\lambda) := \begin{cases} 1/\sqrt{2\pi} & \text{若 } |\lambda| \leqslant \lambda_c \\ 0 & \text{若 } |\lambda| > \lambda_c \end{cases} \qquad (2.19)$$

这里的常数因子$1/\sqrt{2\pi}$是为了后面计算上的方便。由于对于$|\lambda| > \lambda_c$，$\widehat{Lf(\lambda)} = \sqrt{2\pi}\widehat{f(\lambda)}\widehat{h(\lambda)}$等于0，则该滤波器看来似乎能够抑制掉信号$f$中不想要的频率分量（大于$\lambda_c$）. 但接下来的分析说明，它不可能达到这种理想效果。

容易得出，与系统函数$\hat{h}_{\lambda_c}$相应的冲激响应函数为：

$$\begin{aligned} h_{\lambda_c}(t) &= \mathcal{F}^{-1}[\hat{h}_{\lambda_c}] \quad (\text{由定理 } 2.1) \\ &= (1/\sqrt{2\pi})\int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}_{\lambda_c}(\lambda)e^{i\lambda t}d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda_c}^{\lambda_c} e^{i\lambda t}d\lambda \quad \text{由（2.19）式} \\ &= \left[\frac{e^{i\lambda t}}{2it\pi}\right]_{\lambda=-\lambda_c}^{\lambda=\lambda_c} \\ &= \frac{e^{i\lambda_c t} - e^{-i\lambda_c t}}{2it\pi} \end{aligned}$$

因此，

$$h_{\lambda_c}(t) = \frac{\sin(\lambda_c t)}{\pi t} \tag{2.20}$$

考虑对下面这个简单的输入函数进行滤波：

$$f_{t_c}(t) := \begin{cases} 1 & 0 \leqslant t \leqslant t_c \\ 0 & t < 0 \text{ 或 } t > t_c \end{cases}$$

可认为f_{t_c}是在0 到t_c时间接通，而在其他时间断开的开关信号。f_{t_c}通过滤波器后的输出信号为：

$$\begin{aligned}
(Lf_{t_c})(t) &= (f_{t_c} * h_{\lambda_c})(t) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f_{t_c}(\tau) h_{\lambda_c}(t-\tau)\, d\tau \\
&= \int_0^{t_c} \frac{\sin(\lambda_c(t-\tau))}{\pi(t-\tau)}\, d\tau \quad [\text{由（2.20）式}] \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{\lambda_c(t-t_c)}^{\lambda_c t} \frac{\sin u}{u}\, du \quad [\text{令 } u = \lambda_c(t-\tau)] \\
&= \frac{1}{\pi} \{\mathrm{Si}(\lambda_c t) - \mathrm{Si}(\lambda_c(t-t_c))\}
\end{aligned}$$

其中$\mathrm{Si}(z) = \int_0^z \frac{\sin u}{u} du$。图2.13给出了$(L_{\lambda_c} f_{t_c})(t) = \frac{1}{\pi}\{\mathrm{Si}(\lambda_c t) - \mathrm{Si}(\lambda_c(t-t_c))\}$，当$t_c$和$\lambda_c$都为 1 时的图形。从图2.13可以发现当$t < 0$时，输出信号是非零的，而此时输入信号$f_{t_c}(t)$是等于零的。这说明输出信号在输入信号到达之前就出现了！很明显，实际中能够实现的滤波器是不可能在接收到输入信号之前就有输出。因此，由想当然的思路设计出来的h_{λ_c}是无法实现的。下面的定义和定理描述了物理可实现的滤波器。

因果滤波器

定义 2.18 在输入信号到达后才开始有输出的滤波器称为因果滤波器。

下面的定理告诉我们，什么样的滤波器才是因果的。

定理 2.19 令L是时不变的滤波器，其响应函数为h（即，$Lf = f * h$）。若 L 是因果的，当且仅当对于所有的$t < 0$，有$h(t) = 0$。

证明 只证当$t < 0$时，$h(t) = 0$，则相应的滤波器为因果的。反之的证明留作习题（见习题8）。首先证明，若对于$t < 0$，有$f(t) = 0$，那么此时$(Lf)(t) = 0$。我们有：

$$(Lf)(t) = (f * h)(t) = \int_0^\infty f(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$$

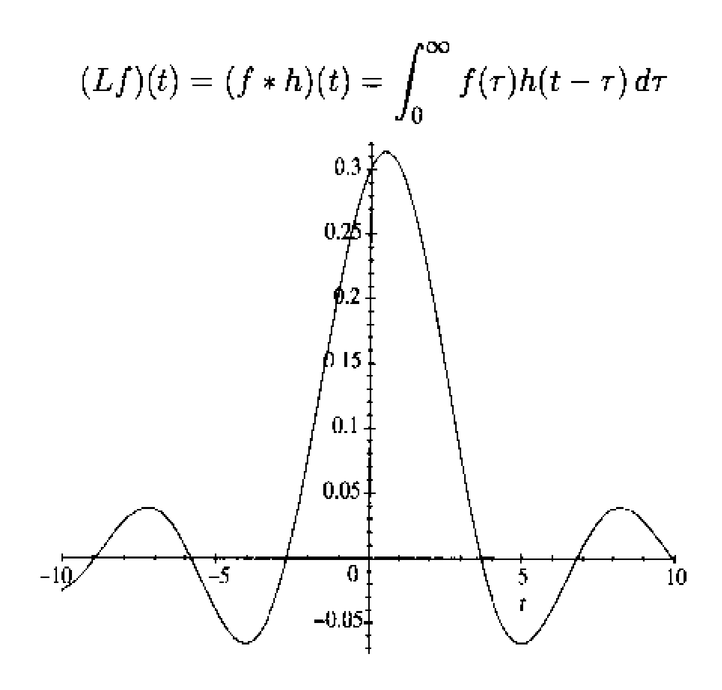


图 2.13 $\frac{1}{\pi}\{\mathrm{Si}(t)-\mathrm{Si}(t-1)\}$的图形

其中的积分下限为0，因为当$\tau < 0$时，$f(\tau) = 0$。若$t<0, \tau \geqslant 0$，则$t-\tau<0$，于是由假设知$h(t-\tau)=0$。因此，对$t<0$，$(Lf)(t)=0$。这样就证明了若对$t<0$时，$f(t)=0$，则此时，$(Lf)(t)=0$。换句话说就是，若输入信号在$t=0$之前没有到达，则滤波器就不会在$t=0$之前有输出。

更一般地，假设输入信号是在$t=a$时开始输入的．为了证明L是因果的，就必须证明Lf不会在$t=a$之前有输出。设$g(t)=f(t+a)$．注意到信号$g(t)$是从$t=0$时刻开始的。由以上的讨论可知，$(Lg)(t)$从$t=0$时才开始有输出。由于$f(t)=g(t-a)=g_a(t)$，则由L的时不变性有：

$$\begin{aligned}(Lf)(t) &= (Lg_a)(t)\\ &= (Lg)(t-a)\end{aligned}$$

因为$(Lg)(\tau)$直到$\tau=0$才开始有输出，所以得到$(Lg)(t-a)$直到$t=a$才开始有输出。于是，$(Lf)(t)=(Lg)(t-a)$直到$t=a$才开始有输出，证毕。

定理2.19虽针对的是响应函数，但它同时给出了关于系统函数$\hat{h}(\lambda)$的重要信息。根据傅里叶变换的定义，我们有：

$$\hat{h}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-i\lambda t}dt$$

若相应于h的滤波器是因果的，则定理2.19意味着当$t<0$时，$h(t)=0$，所以

$$\begin{aligned}\hat{h}(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} h(t)e^{-i\lambda t}dt\\ &= \mathcal{L}[h(t)/\sqrt{2\pi}](i\lambda) \quad \text{这里 } \mathcal{L}\text{=拉普拉斯变换}\end{aligned}$$

这个结论可以总结为下面的定理

定理 2.20　假设 L 是因果滤波器，其响应函数为 h，那么相应于 L 的系统函数为：

$$\widehat{h}(\lambda)=\frac{\mathcal{L}[h](i\lambda)}{\sqrt{2\pi}}$$

其中 $\mathcal{L}$ 表示拉普拉斯变换。

例 2.21

一个比较古老的因果去噪滤波器是 Butterworth 滤波器[14]，它是根据上述定理用下面的函数构造的：

$$h(t)=\begin{cases}Ae^{-\alpha t} & 若\, t\geqslant 0\\ 0 & 若\, t<0\end{cases}$$

其中 A 和 α 为控制参量。它的傅里叶变换为：

$$\hat{h}(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\mathcal{L}h)(i\lambda)=\frac{A}{\sqrt{2\pi}(\alpha+i\lambda)}$$

见习题 10。注意，随着 $\lambda\mapsto\infty$，$\hat{h}(\lambda)$ 是衰减的，这就削弱了信号的高频分量，即 $(\widehat{Lf})(\lambda)=\hat{h}(\lambda)\hat{f}(\lambda)$。

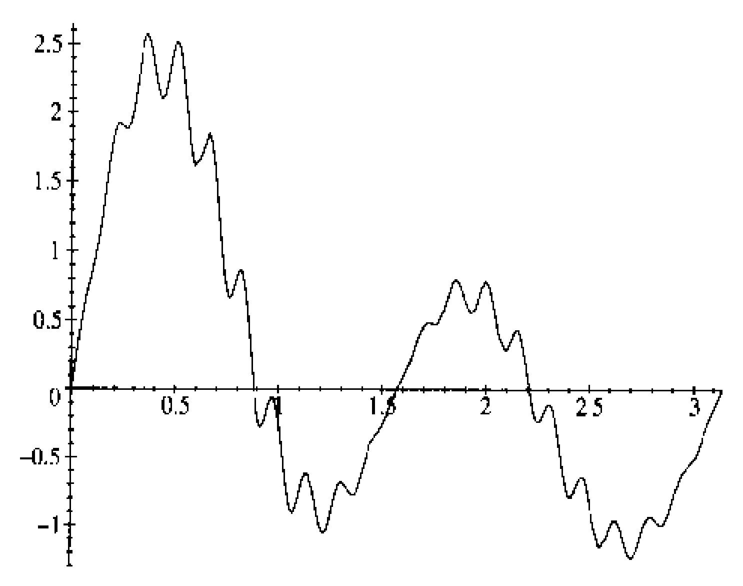


图 2.14　$e^{-t/3}(\sin 2t+2\sin 4t+0.4\sin 2t\sin 40t)$ 的图形

考虑下式给出的信号：

$$f(t)=e^{-t/3}(\sin 2t+2\sin 4t+0.4\sin 2t\sin 40t)\quad 0\leqslant t\leqslant\pi$$

如图 2.14 所示。我们希望滤掉频率大约为 40 的噪声分量，同时不希望改变信号的

基本形状，即要保留频率为2至4之间的频率分量。选择 $A = \alpha = 10$，当 $|\lambda| \leqslant 4$ 时，$\widehat{h}(\lambda)$ 接近于于 $\widehat{h}(0) = 1/\sqrt{2\pi}$；而当 $\lambda \geqslant 40$时，$|\widehat{h}(\lambda)|$ 非常小（小于0.1）。这样当信号通过该滤波器后，将保留低频分量（频率 $\leqslant 4$），而抑制高频分量（频率 $\geqslant 40$）。图2.15 给出了滤波后信号 $(f * h)(t)$ 在 $0 \leqslant t \leqslant \pi$ 之间的波形，信号的大部分高频噪声已经被滤除掉，同时大部分的低频分量被保留下来。

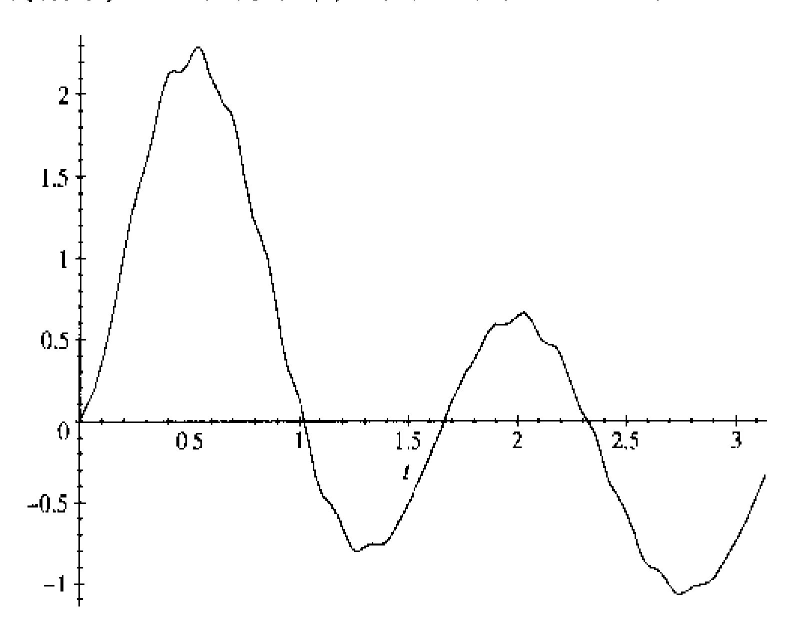


图 2.15 图 2.14 表示的信号经过滤波器后的波形

2.4 采样定理

本节将要研究一类信号（函数），其傅里叶变换在有限区间 $[-\Omega, \Omega]$ 以外为零，即（频率）带限函数。例如，人耳只能听到频率小于 20 kHz（1 kHz 表示每秒1000 个周期）的声音，这样，即使发出更高频率的声音，任何频率大于 20 kHz 的声音人耳也是听不到的。电话线传输的语音信号属于典型的带限信号。下面将证明，带限信号可以由它在时间上均匀间隔的（采样）值重建，该结论是把连续信号变为数字信号进行处理的基础。

定义 2.22 若存在常数 $\Omega > 0$，使得

$$\hat{f}(\lambda) = 0\ ,\quad |\lambda| > \Omega$$

则函数 f 称为频率带限信号。当 Ω 是使上式成立的最小频率时，自然频率 $\nu := \frac{\Omega}{2\pi}$ 称为 Nyquist 频率，$2\nu = \frac{\Omega}{\pi}$ 称为 Nyquist 抽样率。

定理 2.23（Shannon-Whittaker 采样定理） 假设 $\hat{f}(\lambda)$ 是分段光滑且连续的，而且对于 $|\lambda| > \Omega$，有 $\widehat{f}(\lambda) = 0$，其中 Ω 是某一固定的正数。那么，$f = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}]$ 完全

由其在点$t_j = j\pi/\Omega$，$j = 0, \pm1, \pm2, \cdots$处的值确定。确切地说，$f$ 可以写成下面的级数展开形式：

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f(j\pi/\Omega)\frac{\sin(\Omega t - j\pi)}{\Omega t - j\pi} \tag{2.21}$$

上式右边的级数是一致收敛的。

这是一个非常重要的定理！下面让我们来看看它的一个具体应用，即如何在单条电话线（信道）上同时传输多路电话信号。我们可能听到的最大（自然）频率大约为 20 kHz，所以电话传输的语音信号是典型的带限信号。实际上，电话信号中的主要频率分量低于1 kHz，此即为Nyquist频率。Nyquist 抽样率$\nu = \frac{\Omega}{\pi}$是Nyquist频率的2 倍，即2 kHz，因此我们需要每 0.5 毫秒对信号采样一次。经过以上处理后，在一条线路上总共可以传输多少路电话信号呢？传输线典型的传输速率为 56 Kb/s，若每个采样值用 7 比特来表示，则每秒可以传输 8000 个采样值，或每毫秒 8 个采样值，或每 0.5 毫秒 4 个采样值。因此通过对每路信号加标识并进行交织，我们可以同时传输 4 路语音信号。在接收端，可利用（2.21）式的级数展开式，根据采样值$f(\frac{1}{2}j)$（这里的j为整数，时间单位是毫秒）来重构原信号。下面给出这个定理的证明。

证明　根据定理 1.20（令其中的$a = \Omega$，$t = \lambda$），将$\hat{f}(\lambda)$在$[-\Omega, \Omega]$上展开为傅里叶级数：

$$\hat{f}(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\pi k\lambda/\Omega}, \quad c_k = \frac{1}{2\Omega}\int_{-\Omega}^{\Omega} \hat{f}(\lambda)e^{-i\pi k\lambda/\Omega}d\lambda$$

由于$|\lambda| \geqslant \Omega$时，$\hat{f}(\lambda) = 0$，则求$c_k$的积分限可以改为从$-\infty$到$+\infty$：

$$c_k = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\Omega}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\lambda)e^{-i\pi k\lambda/\Omega}d\lambda$$

由定理 2.1 有：

$$c_k = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\Omega}f(-k\pi/\Omega)$$

将其代入上面的级数展开式中，同时将求和指标k替换为$j = -k$，得：

$$\hat{f}(\lambda) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{2\pi}}{2\Omega}f(j\pi/\Omega)e^{-i\pi j\lambda/\Omega} \tag{2.22}$$

由于$\hat{f}$是连续的分段光滑的函数，则由定理1.30 可知，级数（2.22）是一致收敛的。

应用定理2.1有：

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\lambda)e^{i\lambda t}\,d\lambda$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\Omega}^{\Omega}\hat{f}(\lambda)e^{i\lambda t}\,d\lambda \quad \text{因为 } \hat{f}(\lambda)=0,\ |\lambda|\geqslant\Omega$$

将(2.22)式中的$\widehat{f}$代入上式，并交换积分和求和的次序，得：

$$f(t)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{\sqrt{2\pi}}{2\Omega}f(j\pi/\Omega)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\Omega}^{\Omega}e^{-i\pi j\lambda/\Omega+i\lambda t}d\lambda \tag{2.23}$$

(2.23)式中的积分为：

$$\int_{-\Omega}^{\Omega}e^{-i\pi j\lambda/\Omega+i\lambda t}d\lambda=2\frac{\Omega\sin(t\Omega-j\pi)}{t\Omega-j\pi}$$

化简(2.23)式后，就得到(2.21)式，定理1.20证毕。

由于系数(绝对值)的衰减率为$1/j$，使得(2.21)式的收敛速度是很慢的。通过采用过采样技术(见习题14)，系数(绝对值)的衰减率可为$1/j^2$或更快。反之，若信号的采样速率低于Nyquist抽样率，则通过(2.21)式重构信号时，不但会丢失高频分量，而且高频分量的能量还会转到原来的低频分量的位置上去，这种现象称为混叠(*aliasing*)。

例 2.24

函数f的傅里叶变换为：

$$\widehat{f}(\lambda):=\begin{cases}\sqrt{2\pi}(1-\lambda^2) & |\lambda|\leqslant 1\\ 0 & |\lambda|>1\end{cases}$$

利用傅里叶逆变换求$f(t)=\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}]$：

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(\lambda)e^{i\lambda t}\,d\lambda$$
$$=\int_{-1}^{1}(1-\lambda^2)e^{i\lambda t}\,d\lambda$$
$$=\frac{4\sin(t)-4\cos(t)\,t}{t^3}.$$

最后一个等式可以通过分部积分得到(或利用你所熟悉的符号计算语言)，f如图2.16所示。

由于当 $|\lambda| > 1$ 时，$\hat{f}(\lambda) = 0$，因此由采样定理，只要选择 Ω 的值大于或等于 1 即可。对 $\Omega = 1$，根据采样定理，图 2.17 画出了级数展开中前 30 项和的图形。比较图 2.16 和图 2.17 可以发现，它们基本上是一样的。

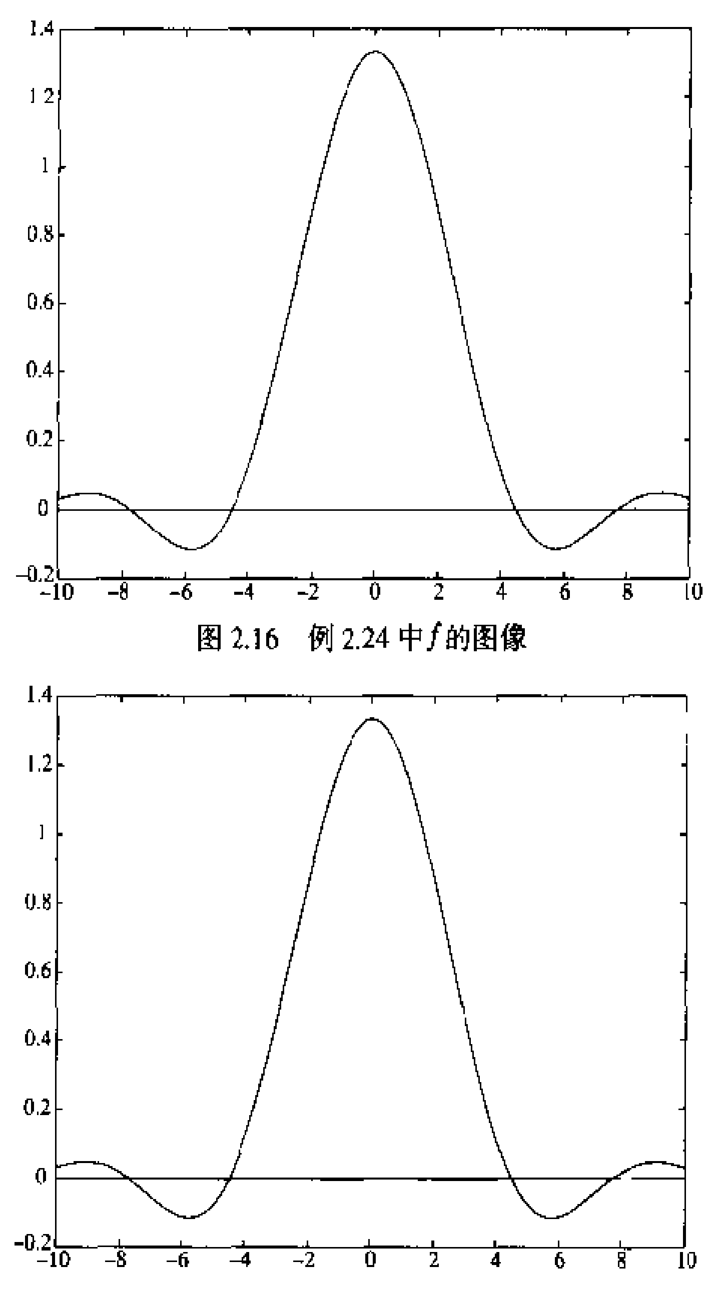


图 2.16　例 2.24 中 f 的图像

图 2.17　由采样定理，级数展开中前 30 项和的图形，$\Omega = 1$

2.5　不确定性原理

本节提出不确定性原理。不确定性原理表明一个函数不可能同时在时域和频域具有任意小的分辨。为了说明这个概念，给出以下定义。

定义 2.25　假设 f 为 $L^2(R)$ 的函数，则 f 在点 $a \in R$ 处的分辨定义为：

$$\Delta_a f = \frac{\int_{-\infty}^{\infty}(t-a)^2|f(t)|^2\,dt}{\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\,dt}$$

f 在 a 点的分辨度量了它的图形在 $t=a$ 处的偏差或扩展。若 f 的图形集中在 $t=a$ 处，则 f 的分辨很小[1]，如图 2.18 所示（此时$a=0$）。若 f 的图形在 $t=a$处展开得比较宽，则它的分辨就大[2]，如图 2.19 所示（此时$a=0$）。

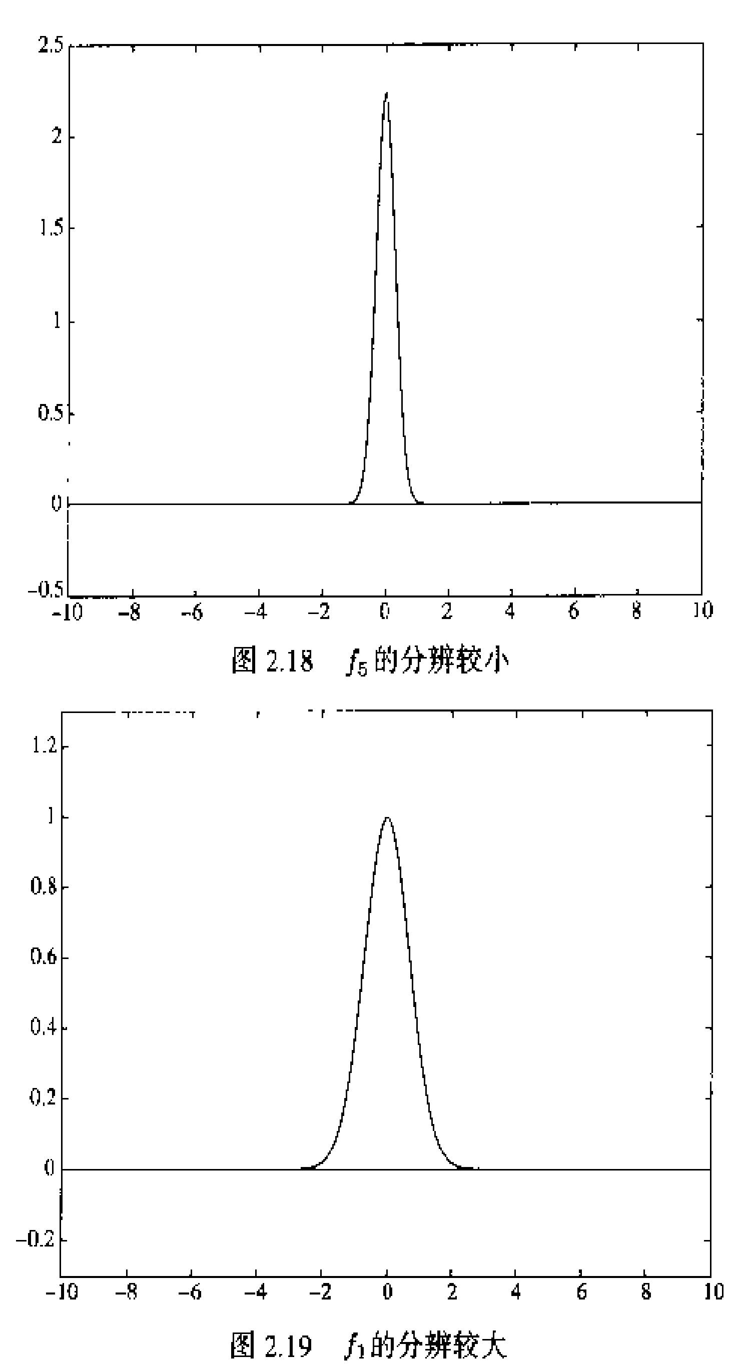


图 2.18　f_5的分辨较小

图 2.19　f_1的分辨较大

关于分辨的另一种描述是与统计有关的。函数$\frac{|f(t)|^2}{\int|f|^2}$可以被认为是一个概率密度

① 分辨率高——译者注。

② 分辨率低——译者注。

函数（它是非负的且积分为 1，这些都是成为概率密度函数的必要条件）。如果 a 为依此概率密度的随机变量的均值，则 $\Delta_a f$ 刚好是它的方差。

由傅里叶变换得到分辨的频域定义：

$$\Delta_\alpha \widehat{f} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (\lambda-\alpha)^2 |\widehat{f}(\lambda)|^2 \, d\lambda}{\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\lambda)|^2 \, d\lambda}$$

根据 Plancherel 公式（定理 2.12），分辨在时域和频域的定义（即 f 和 $\widehat{f}$）的分母是相等的。

如果分辨 $\widehat{f}$ 在 $\lambda=\alpha$ 处的值小，则 f 的各频率分量集中在 $\lambda=\alpha$ 附近。

下面讨论不确定性原理。

定理 2.26（不确定性原理） 假设 f 为 $L^2(R)$ 空间的函数，它在 $-\infty$ 和 $+\infty$ 处为 0，则对于任意的 $a \in R$ 和 $\alpha \in R$，有：

$$\Delta_a f \cdot \Delta_\alpha \widehat{f} \geqslant \frac{1}{4} \tag{2.24}$$

不确定性原理的一个结论是，f 在 a 处的分辨（即 $\Delta_a f$）与 f 在 α 处的分辨（即 $\Delta_\alpha \widehat{f}$）不可能同时任意地小。图 2.18 提供了一个直观的解释。图中的波形集中在 $t=0$ 附近，因此它在 $t=0$ 处的分辨很小。然而，由于这个函数变化剧烈，因此它的傅里叶变换中包含了分布广泛的各种频率分量，这样 $\widehat{f}$ 在任意频率处的分辨都将很大。图 2.20 是图 2.18 中函数的傅里叶变换，从中可以看出 $\widehat{f}$ 的波形很宽阔。

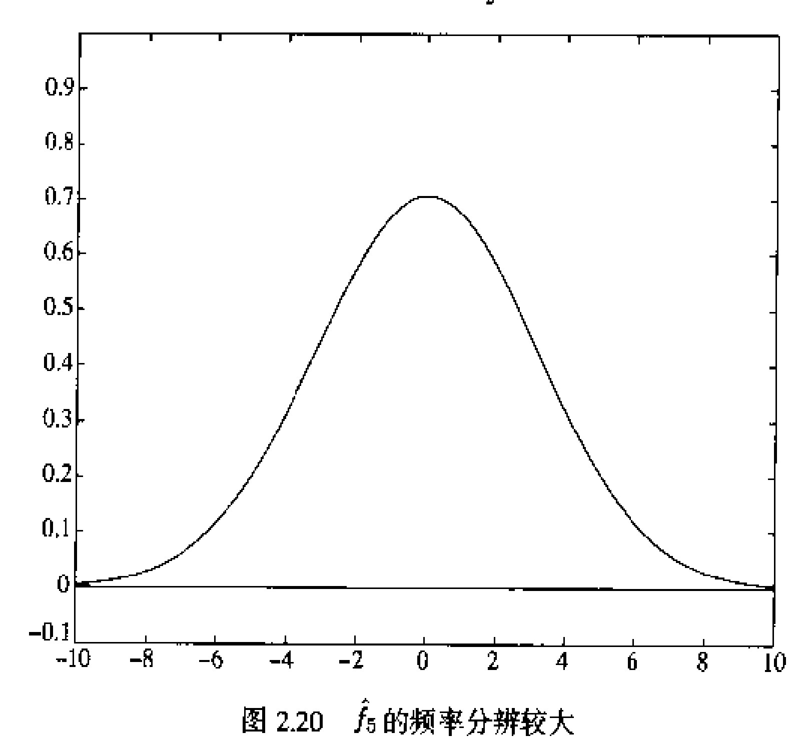


图 2.20　$\hat{f}_5$ 的频率分辨较大

为了给出定量的描述，假设

$$f_s(x) = \sqrt{s}e^{-sx^2}$$

当$s=5$和$s=1$时，f_s的图形分别是图 2.18 和图 2.19，注意到随着s的增加，指数部分为更小的负数，因此f_s的分辨减小（即f_s的图形变得更加集中于原点附近）。

f_s的傅里叶变换为：

$$\widehat{f_s}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{-\lambda^2}{4s}}$$

见习题6。除了前面的常数因子不同，f_s的傅里叶变换和f_s具有一样的负指数形式，则$\widehat{f_s}$的傅里叶变换的图形和f_s的图形是类似的。但是它们之间的显著差别在于：因子s出现在$\widehat{f_s}$中负指数的分母中，而对于f_s，因子s出现在分子中。因此，随着s的增加，$\widehat{f_s}$的分辨也增加，而f_s的分辨却随着s的增加而减小。特别地，不可能得到一个恰当的s值，使得f_s和$\widehat{f_s}$的分辨同时都比较小。

不确定性原理的证明　首先声明下面的等式成立：

$$\left\{(\frac{d}{dt} - i\alpha)(t-a)\right\}f - \left\{(t-a)(\frac{d}{dt} - i\alpha)\right\}f = f \qquad (2.25)$$

其中，α和a是实常数。将左边详细地写出，就是：

$$\frac{d}{dt}\{(t-a)f\} - i\alpha(t-a)f - (t-a)(f' - i\alpha f)$$

对上面的第 1 项，按求导法则进行简化，得到的最终结果为f，即(2.25)式成立。

注意，若将(2.25)式的两边同时除以$\|f\| = \|f\|_{L^2}$，则等式仍成立。由于$f/\|f\|$的L^2范数等于1，所以可以直接假设$\|f\| = 1$（否则只要将f替换为$f/\|f\|$即可）。

对(2.25)式的两边同时求与f的L^2内积，得到：

$$\left\langle(\frac{d}{dt} - i\alpha)\{(t-a)f(t)\}, f(t)\right\rangle - \left\langle(t-a)(\frac{d}{dt} - i\alpha)f(t), f(t)\right\rangle = \|f\|^2 = 1 \qquad (2.26)$$

上式左边两项均含有积分式（积分限为$-\infty$和∞）。对左边的第 1 项积分利用分部积分法则，并且假设$f(-\infty) = f(\infty) = 0$，得：

$$\left\langle(t-a)f(t), (-\frac{d}{dt} + i\alpha)f(t)\right\rangle - \left\langle(\frac{d}{dt} - i\alpha)f(t), (t-a)f(t)\right\rangle = 1 \qquad (2.27)$$

详细的推导过程由读者完成，见习题 9。

由(2.27)式和三角不等式，得到：

$$1 \leqslant \left|\left\langle(t-a)f(t), (-\frac{d}{dt} + i\alpha)f(t)\right\rangle\right| + \left|\left\langle(\frac{d}{dt} - i\alpha)f(t), (t-a)f(t)\right\rangle\right|$$

把 Schwarz 不等式（见定理 0.11）用于上边的两个内积，得：

$$1 \leqslant 2\|(\frac{d}{dt} - i\alpha)f(t)\| \, \|(t-a)f(t)\|$$

然后，由 Plancherel 公式（定理 2.12）和定理2.6中的第（4）条性质，有：

$$\|(\frac{d}{dt} - i\alpha)f(t)\| = \|(\lambda - \alpha)\hat{f}(\lambda)\|$$

联立上面的等式和前一个不等式，得：

$$\|(\lambda-\alpha)\hat{f}(\lambda)\| \, \|(t-a)f(t)\| \geqslant \frac{1}{2}$$

由于 $\|f\|_{L^2} = 1 = \|\widehat{f}\|_{L^2}$，

$$\Delta_a(f) = \|(t-a)f\|_{L^2}^2 \quad 和 \qquad \Delta_\alpha \widehat{f} = \|(\lambda-\alpha)\widehat{f}\|_{L^2}^2$$

因此，对上面的不等式两边取平方得：

$$\Delta_\alpha \widehat{f} \, \Delta_a f \geqslant \frac{1}{4}$$

这样就完成了不确定性原理的证明①。

2.6 习题

1. 考虑信号

$$f(t) = \begin{cases} \cos(3t) & -\pi \leqslant t \leqslant \pi \\ 0 & 其他 \end{cases}$$

证明：

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mt)\cos(\lambda t)\, dt = -2\frac{(-1)^m \lambda \sin(\pi\lambda)}{m^2 - \lambda^2}$$

其中 m 为整数，且 $\lambda \neq m$。提示：把下面的等式加起来：

$$\cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$$
$$\cos(u-v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v$$

---

① 该证明过程是基于 H. P. Robertson 于 1929 年所著的"Physical Review 34"一书的量子力学部分（第 163 页至 164 页）。

用上面的积分式证明：

$$\widehat{f}(\lambda)=\frac{-\sqrt{2}\lambda\sin(\lambda\pi)}{\sqrt{\pi}(\lambda^2-9)}$$

这个结果已经在例 2.3 中使用。

2. 令

$$f(t)=\begin{cases}\sin(3t) & -\pi\leqslant t\leqslant\pi\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

计算该函数的傅里叶变换 $\widehat{f}(\lambda)$（要求补充例 2.4 计算过程中所没有的细节）。

3. 注意，可以利用符号计算语言来帮助求解本题。令

$$f(t)=\begin{cases}t^2+4t+4 & -2\leqslant t\leqslant -1\\ 2-t^2 & -1\leqslant t\leqslant 1\\ t^2-4t+4 & 1\leqslant t\leqslant 2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

证明 f 和 f' 是处处连续的（特别注意 $t=-2,\ -1,\ 1$和2处的情况）。画出 f 的图形，计算其傅里叶变换并证明：

$$\widehat{f}(\lambda)=\left(\frac{8\sin(\lambda)(1-\cos(\lambda))}{\sqrt{2\pi}\lambda^3}\right)$$

画出上式在$-10\leqslant\lambda\leqslant 10$上的图形。注意，当$\lambda\mapsto\infty$时，傅里叶变换$\widehat{f}(\lambda)$的衰减率为$\frac{1}{\lambda^3}$。同时注意到，在习题 1 中给出的函数是不连续的，$\widehat{f}(\lambda)$的衰减率为$\frac{1}{\lambda}$。习题 2 中的函数 f 是连续的，但不是可微的，此时$\widehat{f}(\lambda)$的衰减率为$1/\lambda^2$。你发现了其中的规律吗？

4. 假设$f\in L^2(-\infty,\infty)$是实值的偶函数，证明$\widehat{f}$是实值的。假设 $f\in L^2(-\infty,\infty)$ 是实值的奇函数，证明对任一λ，$\widehat{f}(\lambda)$是纯虚数（实部为零）。

5. 令

$$\phi(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

证明：

$$(\phi*\phi)(x)=\begin{cases}1-|x-1| & 0\leqslant x<2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

6. 设 $f_s(x) = \sqrt{s}e^{-sx^2}$，证明

$$\hat{f}_s(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{-\lambda^2}{4s}}$$

提示：根据傅里叶变换定义，写出其积分式后，对指数部分进行配方，然后进行变量代换，最后利用$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$，即可得到最终结果。

7. 对定理2.6中关于傅里叶逆变换的性质进行证明。对定理2.6中最后一条关于傅里叶变换和拉普拉斯变换之间的关系进行证明。

8. 假设 L 是时不变滤波器，其响应函数为 h（见定理2.19）。证明若 L 为因果的，则对于所有的$t < 0$，$h(t) = 0$。提示：用反证法进行证明。假设对于某些$t_0 < 0$，$h(t_0) \neq 0$，证明可以构造适当的f，它仅在$[0,\delta]$之间非零，其中δ为小的正数，使得对某些$t < 0$，即使$f(t) = 0$对所有的$t < 0$成立，也有$L(f)(t) \neq 0$（这样就推出与因果性矛盾）。

9. 利用分部积分，写出由(2.26)式推出(2.27)式的详细步骤。

10. 设

$$h(t) = \begin{cases} Ae^{-\alpha t} & t \geqslant 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

其中A和α为参数，如例 2.21 中一样，证明

$$\hat{h}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\mathcal{L}h)(i\lambda) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}(\alpha + i\lambda)}$$

11. 考虑信号

$$f(t) = e^{-t}(\sin 5t + \sin 3t + \sin t + \sin 40t) \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi$$

将信号通过 Butterworth 滤波器进行滤波[也就是计算$(f * h)(t)),0 \leqslant t \leqslant \pi$]。试验采用不同的变量值$A = a$（初始设定$A = a = 10$），比较原信号与滤波后信号的差别。

12. 考虑这样一个滤波器：$f \mapsto f * h$，其中

$$h(s) := \begin{cases} 1/d & 0 \leqslant t \leqslant d \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

计算并画出不同的d时，$0 \leqslant \lambda \leqslant 20$间的$\widehat{h}(\lambda)$。假设希望利用这个滤波器抑制信号中频率大于 30 的噪声分量，而保留频率在0到5（以2π为周期的）之间的频率分量，d应该取什么值？将信号

$$f(t) = e^{-t}(\sin 5t + \sin 3t + \sin t + \sin 40t) \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi$$

通过由上面选择的 d 所确定的滤波器，对 f 和滤波后的信号图形进行比较.

13. 采样定理(定理 2.23)表明若信号是带限的，频率范围为 $[-\Omega, \Omega]$，则信号可以由均匀间隔为 π/Ω 的采样点的值完全恢复出来。现在假设信号的傅里叶变换在区间 $[\omega_1 \leqslant \lambda \leqslant \omega_2]$ 以外为零，求此时与(2.21)式类似的公式，时间间隔为 $2\pi/(\omega_1 + \omega_2)$。提示：证明下列信号的傅里叶变换在 $[-\Omega, \Omega]$ 上是带限的：

$$g(t) = e^{-it\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)} f(t)$$

其中 $\Omega = (\omega_2 - \omega_1)/2$。然后把定理2.23应用于信号 g。

14. (**过采样**)这个习题推广了一般的采样定理，过采样的收敛速率要比定理 2.23 中的收敛速度快。证明下面的3个问题。

(a) 假设 f 为带限信号，即当 $|\lambda| \geqslant \Omega$ 时，$\widehat{f}(\lambda) = 0$。固定一个常数 $a > 1$，参考定理2.23 的证明步骤，证明

$$\widehat{f}(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{-n} e^{-in\pi\lambda/a\Omega} \qquad c_{-n} = \frac{\pi}{\sqrt{2\pi}a\Omega} f\left(\frac{n\pi}{a\Omega}\right)$$

(b) $\widehat{g_a}(\lambda)$ 是由图 2.21 给出的函数，证明

$$g_a(t) = \frac{\sqrt{2}(\cos(\Omega t) - \cos(a\Omega t))}{\sqrt{\pi}(a-1)\Omega t^2}$$

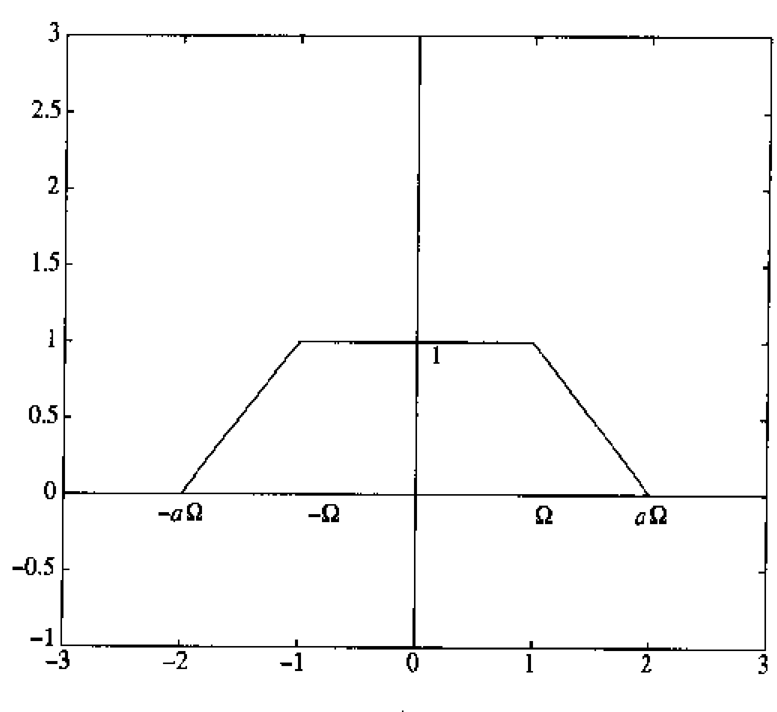


图 2.21 $\widehat{g}_a$ 的图形

（c）由于对$|\lambda| \geqslant \Omega$，$\hat{f}(\lambda)=0$，所以$\hat{f}(\lambda)=\hat{f}(\lambda)\hat{g}_a(\lambda)$。利用定理 2.1、定理 2.6 以及（a）与（b）中关于$\hat{f}$和g_a的表示式，证明：

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\pi}{\sqrt{2\pi}\,a\Omega}f\left(\frac{n\pi}{a\Omega}\right)g_a\left(t-\frac{n\pi}{a\Omega}\right) \tag{2.28}$$

既然$g_a(t)$的分母中有一个因子t^2，因此$f(t)$的这个表示式要比定理2.23 所示的f收敛得快（前者的收敛速率为$1/n^2$，而后者的是$1/n$）。(2.28）式的缺点是函数的采样点在$n\pi/(a\Omega)$上，这表明此时的采样速率要比定理2.23 中采样点在$n\pi/\Omega$时的快（因为$a>1$）。因此，在采样率和收敛速度之间存在一个折衷问题。

第3章　离散傅里叶分析

傅里叶变换与傅里叶级数技术可用于分析如图3.1所示的连续信号，然而在许多应用场合，例如来自CD的信号，信号本身已经是离散的（见图3.2），在这种情形下，需要利用傅里叶变换的离散形式来分析离散信号。

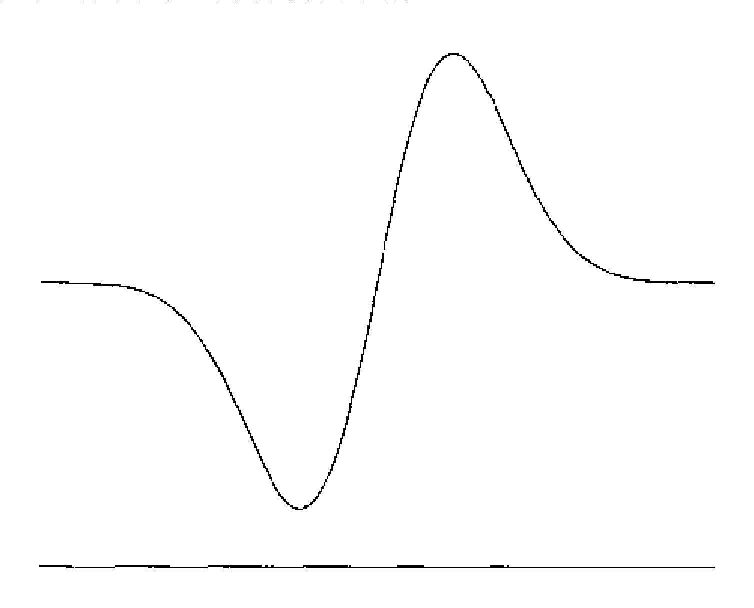


图3.1　连续信号

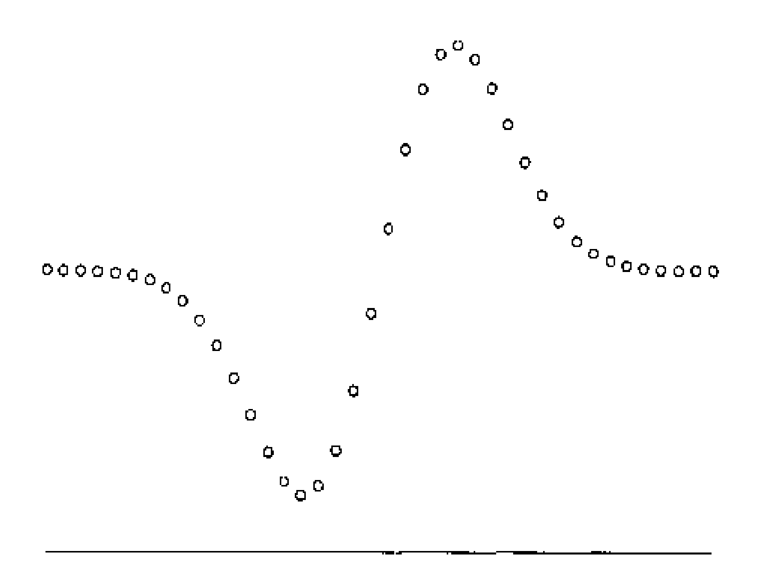


图3.2　离散信号

3.1 离散傅里叶变换

为了更好地了解离散傅里叶变换的来历，我们用数值的方法来近似连续函数$f(t)$的傅里叶级数的系数。根据梯形法则，以步长$h = 2\pi/n$近似积分$(2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} F(t)\,dt$，即：

$$(2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} F(t)\,dt \approx \frac{1}{2\pi}\frac{2\pi}{n}\left[\frac{Y_0}{2} + Y_1 + \cdots + Y_{n-1} + \frac{Y_n}{2}\right]$$

其中$Y_j := F(hj) = F(2\pi j/n), j = 0, \cdots, n$。如果$F(t)$是以$2\pi$为周期的，则$Y_0 = Y_n$，上式可以写为：

$$(2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} F(t)dt \approx \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} Y_j$$

将此式用于计算第k个复傅里叶系数，有：

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\exp(-ikt)\,dt \approx \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(2\pi j/n)\exp(-2\pi ijk/n)$$

因此，

$$\alpha_k \approx \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} y_j \overline{w}^{jk} \tag{3.1}$$

这里，

$$y_j - f(2\pi j/n) \text{ 和 } w - \exp(2\pi i/n)$$

等式(3.1)右侧的和式包含y_j，它是函数f在$t = 2\pi j/n$时刻的值，其他t时刻函数f的值不需要知道。在下一节，这个和式将用于定义离散信号的傅里叶变换，该离散信号的值，只在离散时刻$t = 2\pi j/n$，$j = 0, \cdots, n-1$时已知。

由于$\overline{w}^n = e^{-2\pi i} = 1$，因此若以$k + n$替换$k$，则(3.1)式右侧不变。而$\alpha_k$的周期不为$n$，这样当$k \geqslant n$时，(3.1)式右侧无法近似$\alpha_k$。因为梯形法则只有在步长$h = 2\pi/n$比频率$k$小的前提下，才能保证精确近似，所以(3.1)式也仅在k比n小的条件下才成立。

3.1.1 离散傅里叶变换的定义

若S_n表示以n为周期的复数集，那么S_n中的每个元素$y = \{y_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$都可以看成

周期离散信号（y_j是$t = t_j$时刻信号的值）。对于任意整数k，若$y_{k+n} = y_k$，则y_j序列以n为周期。在定义了加法和乘法运算后，集$\mathcal{S}_n$构成了复矢量空间。加法和乘法运算的定义如下：如果$x = \{x_j\}_{j=-\infty}^{\infty} \in \mathcal{S}_n$，$y = \{y_j\}_{j=-\infty}^{\infty} \in \mathcal{S}_n$，那么$\{x + y\}$的第$j$个元素为$x_j + y_j$，$c\{x\}$的第$j$个元素为$cx_j$，$n$应当看做是被研究的离散信号中有意义的最大时刻。

定义 3.1 令$y = \{y_j\}_{j=-\infty}^{\infty} \in \mathcal{S}_n$，则其离散傅里叶变换为序列$(\mathcal{F}_n\{y\})_k = \widehat{y}_k$，这里，

$$\widehat{y}_k = \sum_{j=0}^{n-1} y_j \overline{w}^{jk} \quad \text{其中 } w = \exp(2\pi i/n)$$

即

$$\widehat{y}_k = \sum_{j=0}^{n-1} y_j \exp(-2\pi ikj/n)$$

离散傅里叶变换公式与第k个傅里叶系数式类似，这只要通过把定理1.18中的对t的积分变换成对j的求和即可。正如上节所述，如果y_j是由一定义在$[0, 2\pi]$上的连续信号f得到的，那么$f(\alpha_k)$的第k个傅里叶系数可以近似为：

$$\alpha_k \approx \frac{1}{n}\widehat{y}_k$$

这里的k小于n。

离散傅里叶变换的计算等效于下面的矩阵运算：

$$\mathcal{F}_n\{y\} = \widehat{y} = (\overline{F}_n) \cdot (y)$$

其中$y = (y_0, \cdots, y_{n-1})^T$，$\widehat{y} = (\widehat{y}_0, \cdots, \widehat{y}_{n-1})^T$，并且

$$F_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & w & w^2 & \ldots & w^{n-1} \\ 1 & w^2 & w^4 & \ldots & w^{2(n-1)} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 1 & w^{n-1} & w^{2(n-1)} & \ldots & w^{(n-1)^2} \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

3.1.2 离散傅里叶变换的性质

$\mathcal{S}_n$中的信号经离散傅里叶变换后所产生的离散信号也属于$\mathcal{S}_n$，如下面引理所述。

引理 3.2 $\mathcal{F}_n$是从$\mathcal{S}_n$到$\mathcal{S}_n$的线性算子。

证明　为证明$\mathcal{F}_n\{y\}$属于集合$\mathcal{S}_n$，只要证明$\mathcal{F}_n\{y\}_k$以n为周期。由于

$$\begin{aligned}\widehat{y}_{k+n} &= \sum_{j=0}^{n-1} y_j \overline{w}^{j(k+n)} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} y_j \overline{w}^{jk} \overline{w}^{nj} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} y_j \overline{w}^{jk} \qquad [\text{因为} \overline{w}^n = e^{-(2\pi i/n)n} = 1] \\ &= \widehat{y}_k\end{aligned}$$

因此$\widehat{y}_{k+n} = \widehat{y}_k$，所以该序列以$n$为周期。最后，因为矩阵乘是线性操作，所以$\mathcal{F}_n$是一个线性算子。

下面计算离散傅里叶变换的逆。因为定理 2.1 论述了如何由其傅里叶变换恢复f，所以实际上已得到了逆傅里叶变换。离散傅里叶逆变换与此类似，即可用其离散傅里叶变换$\widehat{y} = \overline{F}_n(y)$，恢复原离散信号$y$。计算离散傅里叶逆变换等同于计算矩阵$\overline{F}_n$的逆。下述定理给出了一个计算该矩阵逆的简单公式。

定理 3.3　设$y = \{y_k\}$是$\mathcal{S}_n$的一个元素，令$\mathcal{F}_n(y) = \widehat{y}$，即

$$\widehat{y}_k = \sum_{j=0}^{n-1} y_j \overline{w}^{jk}$$

这里$w = \exp(2\pi i/n)$。那么$y = \mathcal{F}_n^{-1}(\widehat{y})$由下式给出：

$$y_j = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \widehat{y}_k w^{jk}$$

注释。应用矩阵论的术语，定理 3.3 断言离散傅里叶逆变换由矩阵乘$\frac{1}{n}F_n$ [F_n在（3.2）式中定义]给出，即

$$y = \mathcal{F}_n^{-1}\widehat{y} = \frac{1}{n}(F_n) \cdot (\widehat{y})$$

因为$\widehat{y} = (\overline{F}_n)(y)$，式$y = \frac{1}{n}F_n(\widehat{y})$等同于：

$$I_n = \left(\frac{F_n}{\sqrt{n}}\right)\left(\frac{\overline{F}_n}{\sqrt{n}}\right) \quad \text{其中} I_n = n \times n \text{单位阵} \tag{3.3}$$

因为F_n是对称的，则上式意味着$F_n/\sqrt{n}$是酉阵（逆阵等于其转置的共轭）。

证明　为得到（3.3）式，只要证明：

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} w^{\ell k}\overline{w}^{kj} = \begin{cases} 1 & j=\ell \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

因为$w = e^{2\pi i/n}$，显然有$\overline{w} = w^{-1}$，于是有：

$$w^{\ell k}\overline{w}^{kj} = w^{k(\ell-j)}$$

应用下述恒等式[见在证明引理 1.23 时的（1.23）式]，当$k=0,\cdots,n-1$时，把上式累加起来有：

$$\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \begin{cases} n & z=1 \\ \dfrac{1-z^n}{1-z} & z\neq 1 \end{cases}$$

令$z = w^{\ell-j}$。注意，因为$w^n=1$，所以$z^n=1$。同时，除非$w^{\ell-j}\neq 1$时，有$j=\ell$，$0\leqslant j,\ell\leqslant n-1$，所以上式成为：

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} w^{(\ell-j)k} = \begin{cases} 1 & j=\ell \\ 0 & j\neq\ell \end{cases}$$

于是有：

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} w^{\ell k}\overline{w}^{kj} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} w^{(\ell-j)k} = \begin{cases} 1 & j=\ell \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

证毕。

$\mathcal{F}_n$和$\mathcal{F}_n^{-1}$均是由$\mathcal{S}_n$至$\mathcal{S}_n$的线性变换。以下是一些与定理 2.6 和定理 2.10 中给出的关于傅里叶变换的相类似的性质。这些性质的证明留待习题中。

定理 3.4　对于离散傅里叶变换，以下性质成立。

- 移位或平移。若$y\in\mathcal{S}_n$且$z_k = y_{k+1}$，那么$\mathcal{F}[z]_j = w^j\mathcal{F}[y]_j$，这里$w=e^{2\pi i/n}$。
- 卷积。若$y\in\mathcal{S}_n$且$z\in\mathcal{S}_n$，那么下面的序列

$$[y*z]_k := \sum_{j=0}^{n-1} y_j z_{k-j}$$

也在$\mathcal{S}_n$中。序列$y*z$称为序列y与z的卷积。

- 卷积定理：$\mathcal{F}[y*z]_k = \mathcal{F}[y]_k\mathcal{F}[z]_k$。
- 若$y\in\mathcal{S}_n$是一实数序列，那么

$$\mathcal{F}[y]_{n-k} = \overline{\mathcal{F}[y]_k}\quad 0\leqslant k\leqslant n$$

$$\text{或}\quad \widehat{y}_{n-k} = \overline{\widehat{y}}_k$$

因为$\widehat{y}_{n-k} = \overline{\widehat{y}}_k$，所以只要计算$\widehat{y}_0,\cdots,\widehat{y}_{n/2-1}$（假设$n$是偶数）。应用下节讨论的快速傅里叶变换后，此处的运算效率会进一步提高。

在结束本节前要指出的是，若对连续函数f有$y_k = f(k/2\pi n)$，那么当k相对n很小时，$\widehat{y}_k$是f的第k个傅里叶系数的精确近似。等式$\widehat{y}_{n-k} = \overline{\widehat{y}}_k$再次强调了这一点。例如，若$n$很大，而$k = 1$，那么$\overline{\widehat{y}}_{n-1} = \widehat{y}_1$。它与该信号离散傅里叶变换的低频系数$\alpha_1$非常接近，而$\widehat{y}_{n-1}$与高频系数$\alpha_{n-1}$却有很大不同。

3.1.3　快速傅里叶变换

因为离散傅里叶变换是信号处理中一个非常有用的工具，所以找到一个离散傅里叶变换及其逆变换的快速算法是人们所非常期望的。离散傅里叶变换等同于用序列y（写作$n \times 1$的列矢量）乘以$n \times n$矩阵$\overline{F}_n$，需要n^2次乘法。而快速傅里叶变换（FFT）通过把矩阵F_n变换成一特殊形式，从而可把乘法运算次数减少到大约$5n\log_2 n$。若$n = 1000$，则 FFT 可把乘法运算由百万次减少到 50000 次左右。n越大，FFT 算法的效率越明显。

快速傅里叶变换需要偶数个数据点，即$n = 2N$。考虑序列$y = (y_0,\cdots,y_{2N-1})$（已进行了周期为$n = 2N$的周期延拓）。$\widehat{y}_k$由下式得到：

$$\widehat{y}_k = \sum_{j=0}^{2N-1} y_j \overline{w}^{jk}$$

把上式分为偶数指标部分和奇数指标部分：

$$\widehat{y}_k = \sum_{j=0}^{N-1} y_{2j}\overline{w}^{2jk} + \sum_{j=0}^{N-1} y_{2j+1}\overline{w}^{(2j+1)k}$$

因为$w = e^{2\pi i/n}$和$n = 2N$，令$W = \exp(2\pi i/N) = w^2$，于是有：

$$\widehat{y}_k = \sum_{j=0}^{N-1} y_{2j}\overline{W}^{jk} + \overline{w}^k\left(\sum_{j=0}^{N-1} y_{2j+1}\overline{W}^{jk}\right)$$

上式把$\widehat{y}_k$表示为两个离散傅里叶变换的形式，并用N取代了n：

$$\widehat{y}_k = \mathcal{F}_N[\{y_0, y_2, \cdots, y_{2N-2}\}]_k + \overline{w}^k\mathcal{F}_N[\{y_1, y_3, \cdots, y_{2N-1}\}]_k$$

这里$0 \leqslant k \leqslant 2N-1$。于是，算法效率的提高成为可能。在上式中，用$k+N$代替$k$，并利用了以下事实：

- $\mathcal{F}_N[y_{e_{偶部}}]$和$\mathcal{F}_N[y_{o_{奇部}}]$的周期为$N$。
- $\overline{w}^{k+N} = \overline{w}^k\exp(-\pi i) = -\overline{w}^k$。

于是，当$0 \leqslant k \leqslant N-1$时，有：

$$\widehat{y}_k = \mathcal{F}_N[\{y_0, y_2, \cdots, y_{2N-2}\}]_k + \overline{w}^k \mathcal{F}_N[\{y_1, y_3, \cdots, y_{2N-1}\}]_k \quad (3.4)$$

$$\widehat{y}_{k+N} = \mathcal{F}_N[\{y_0, y_2, \cdots, y_{2N-2}\}]_k - \overline{w}^k \mathcal{F}_N[\{y_1, y_3, \cdots, y_{2N-1}\}]_k \quad (3.5)$$

到此，$(\mathcal{F}_{2N}y)_k = \widehat{y}_k$，$0 \leqslant k \leqslant 2N-1$可用$\mathcal{F}_N[\{y_0, y_2, \cdots, y_{2N-2}\}]_k$和$\mathcal{F}_N[\{y_1, y_3, \ldots, y_{2N-1}\}]_k$，$0 \leqslant k \leqslant N-1$来表达。对离散傅里叶逆变换也可导出类似的公式，它们是：

$$y_k = \frac{1}{2}\left\{\mathcal{F}_N^{-1}[\{\hat{y}_0, \hat{y}_2, \cdots, \hat{y}_{2N-2}\}]_k + w^k \mathcal{F}_N^{-1}[\{\hat{y}_1, \hat{y}_3, \cdots, \hat{y}_{2N-1}\}]_k\right\}$$

$$y_{k+N} = \frac{1}{2}\left\{\mathcal{F}_N^{-1}[\{\hat{y}_0, \hat{y}_2, \cdots, \hat{y}_{2N-2}\}]_k - w^k \mathcal{F}_N^{-1}[\{\hat{y}_1, \hat{y}_3, \cdots, \hat{y}_{2N-1}\}]_k\right\}$$

这里，$0 \leqslant k \leqslant N-1$（上式中因子$\frac{1}{2}$的出现，是由于逆公式中含有因子$1/n$）。

以矩阵形式写出的离散傅里叶变换式为：

$$\mathcal{F}_{2N}y = (\overline{F}_{2N})(y) = \begin{pmatrix} I_N & \overline{D}_N \\ I_N & -\overline{D}_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{F}_N & 0 \\ 0 & \overline{F}_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{\text{偶部}} \\ y_{\text{奇部}} \end{pmatrix}$$

这里矩阵的F_N定义在（3.2）式中，I_N是$N \times N$的单位阵，D_N是对角元为$1, w, w^2, \ldots, w^{N-1}$的对角阵。

计算离散傅里叶变换所需要的乘法次数约为$n^2 = 4N^2$次[因为离散傅里叶变换需要与（3.2）式给出的矩阵F_n做乘法]。计算（3.4）式和（3.5）式的$\hat{y}_k$和$\hat{y}_{k+N}$需要的运算次数为$2N^2+N+1$，因为计算$\mathcal{F}_N[\{y_0, y_2, \cdots, y_{2N-2}\}]_k$和$\mathcal{F}_N[\{y_1, y_3, \cdots, y_{2N-1}\}]_k$均需要$N^2$次乘法。因此，本节提出的算法的乘法次数比上节的几乎要减半（当N较大时）。若N是 2 的倍数，那么通过把$\mathcal{F}_N$表示成关于$\mathcal{F}_{N/2}$的乘积的形式，该过程可继续进行下去，从而使得乘法次数再次减半，即只有大约原来一般的傅里叶变换所需要的乘法次数的 1/4。

若n是 2 的整数次幂，即$n = 2^L$，则可把上述过程迭代L次，第L步迭代包括与1×1矩阵$\overline{F}_1$相乘，实际上就是标量1。实现该算法到底需要多少次乘法呢？答案如下：令K_L是由前述方法计算$\mathcal{F}[y]$时所需的实际乘法次数。因为$n = 2^L$，所以$N = 2^{L-1}$。由前面导出的公式可见，为得到$\mathcal{F}[y]$需要计算$\mathcal{F}[y_{\text{偶部}}]$和$\mathcal{F}[y_{\text{奇部}}]$，所需的乘法次数正比于$2K_{L-1} + N = 2K_{L-1} + 2^{L-1}$，那么$K_L$与$K_{L-1}$的关系是：

$$K_L \approx 2K_{L-1} + 2^{L-1}$$

当$L = 0$时，$n = 2^0 = 1$，所以没有乘法运算，于是，$K_0 = 0$。若$L = 1$，则$K_1 \approx 1$。若$L = 2$，则$K_2 \approx 2 \times 2^1$。类似地有，$K_3 \approx 3 \times 2^2$，$K_4 \approx 4 \times 2^3$，等等。归纳出一

般式$K_L \approx L \times 2^{L-1}$。令$n = 2^L$，所以$L = \log_2 n$。由此可见，乘法次数正比于$n\log_2 n$，实际上，该比例系数约为 5。

当$n = N_1 N_2 \cdots N_m$时，可得到与以上过程类似的算法。但只有n为 2 的整数次幂时，算法的效率最高，其他情况的讨论见有关的参考文献。

例 3.5

函数$f(t) = t + t^2$的离散傅里叶系数的绝对值如图 3.3 所示（该图是应用 MATLAB 的fft函数得到的）。水平轴为$k = 0, 1, 2, \cdots, n$，$n = 64$，小圆点的坐标为$(k, |\widehat{y}_k|)$。因为傅里叶系数随频率而衰减（由 Riemann-Lebesgue 引理），$|\widehat{y}_k|$随k减小到$k = n/2$ 时。因为$|\widehat{y}_{n-k}| = |\widehat{y}_k|$（于是，$|\widehat{y}_{n/2+1}|, \cdots, |\widehat{y}_{n-1}|$ 的值与 $|\widehat{y}_{n/2-1}|, \cdots, |\widehat{y}_1|$的一样），所以$|\widehat{y}_k|$的图形关于直线$k = n/2 = 32$对称。

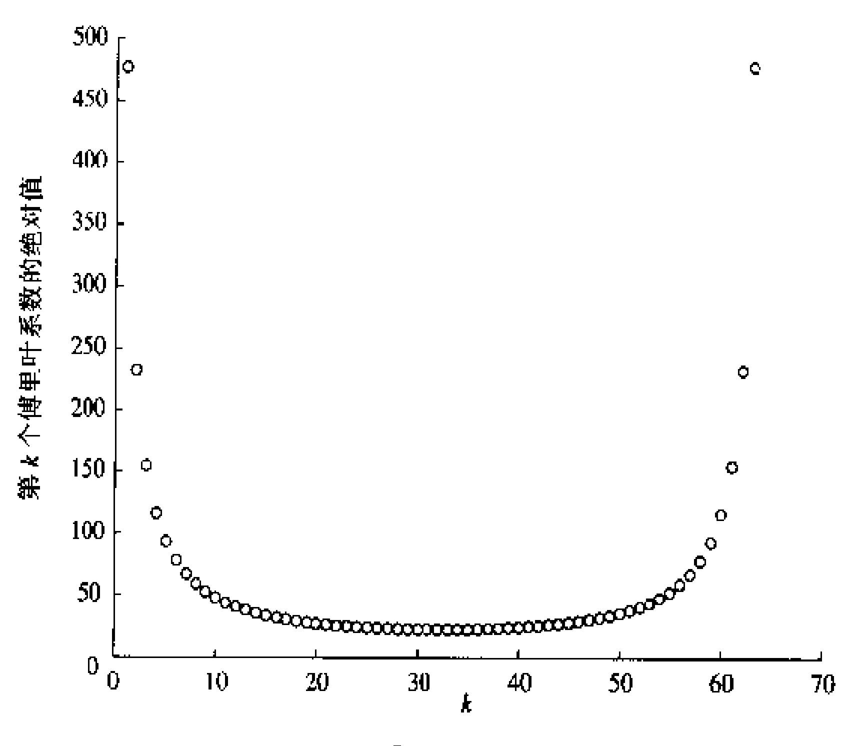


图 3.3 $f = t + t^2$的快速傅里叶变换系数

例 3.6

考虑如图 3.4 所示的信号，它由以下函数产生：

$$y(t) = e^{-(\cos t)^2}(\sin 2t + 2\cos 4t + 0.4\sin t \sin 50t)$$

其中$0 \leqslant t \leqslant 2\pi$。目的是从该信号中滤除高频噪声。信号在$0 \leqslant t \leqslant 2\pi$上首先离散化为$2^8 = 256$个等间隔的样值点，然后得到其离散傅里叶变换系数$\widehat{y}_k$，$k = 0, \cdots, 255$。由图 3.4 可知，噪声频率大于 5（每$2\pi$为 1 个周期）。于是，可仅保留$0 \leqslant k \leqslant 5$时的$\widehat{y}_k$，而令$6 \leqslant k \leqslant 128$时的$\widehat{y}_k$为 0。由定理 3.4，当

$128 \leqslant k \leqslant 250$时，$\widehat{y_k}=0$。最后，对经过滤波后的系数$\widehat{y_k}$，应用快速傅里叶逆变换，得到经过滤波后的复原信号，如图 3.5 所示。

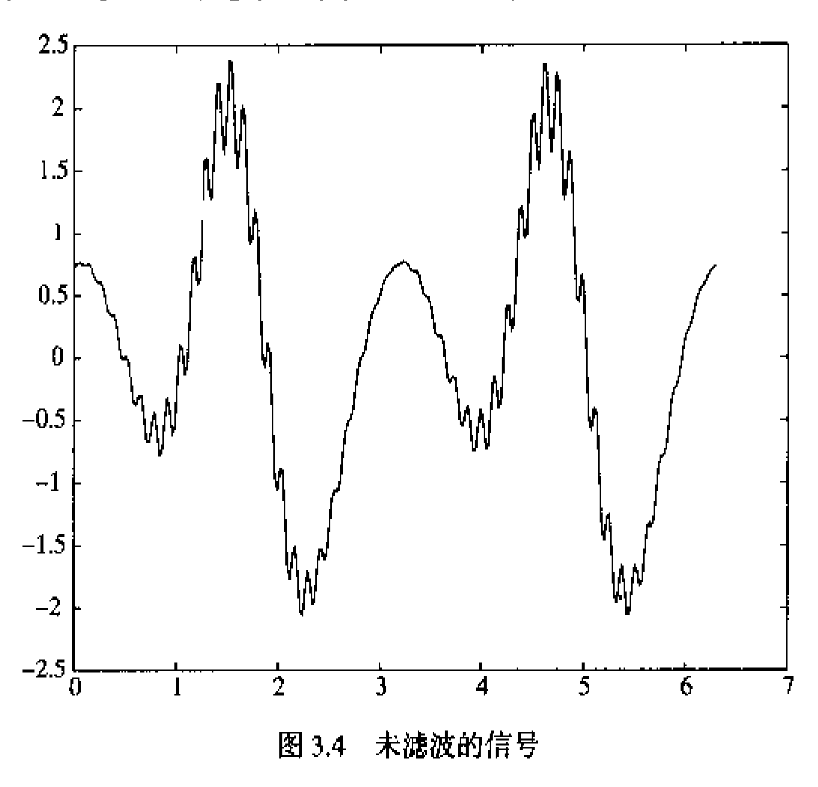


图 3.4 未滤波的信号

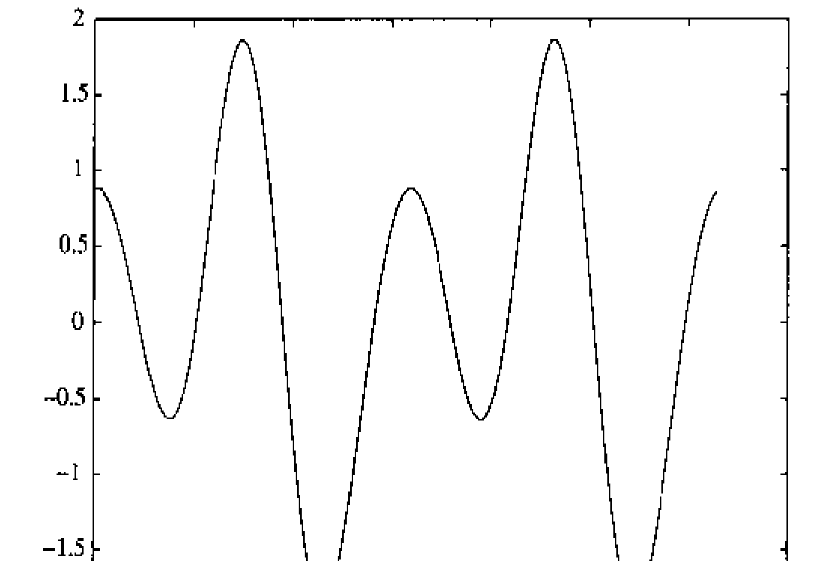


图 3.5 用 FFT 滤波后的信号，仅保留$k=0,\cdots,5$时的$\widehat{f_k}$

例 3.7

考虑如图 3.6 所示的信号，由以下函数产生：

$$y(t) = e^{-t^2/10}(\sin 2t + 2\cos 4t + 0.4\sin t \sin 10t)$$

其中$0 \leqslant t \leqslant 2\pi$。先进行快速傅里叶变换，然后舍弃小的傅里叶系数，从而使得该信号得到压缩。同上例一样，信号离散化为$2^8 = 256$个等间隔的样值点，由快速离散傅里叶变换得到系数$\widehat{y}_k$，令其中 80%的系数$\widehat{y}_k$为 0（即最小的 80%个系数），然后对新的$\widehat{y}_k$进行快速傅里叶逆变换，最后得到压缩后的信号，如图 3.7 所示。注意，由于傅里叶级数的部分和是周期性的，所以存在 Gibbs 效应，复原信号在 0 和2π处的值相同。

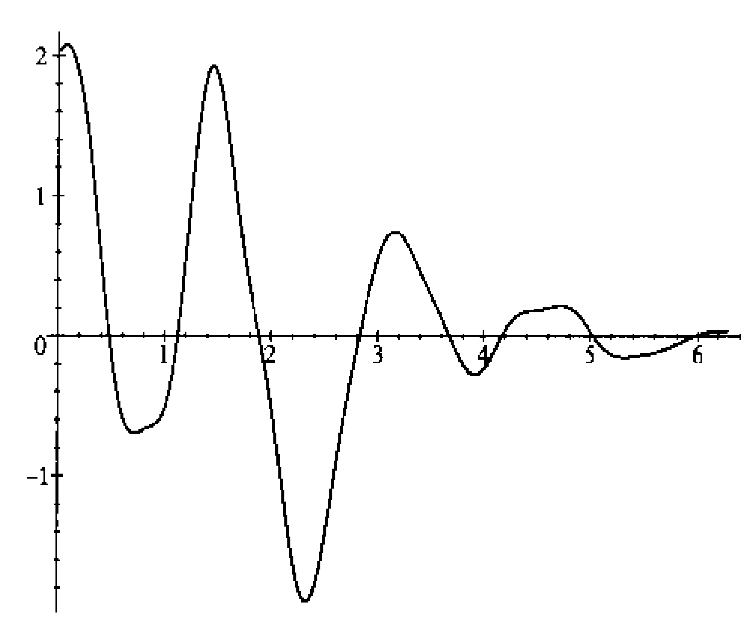


图 3.6　未压缩的信号

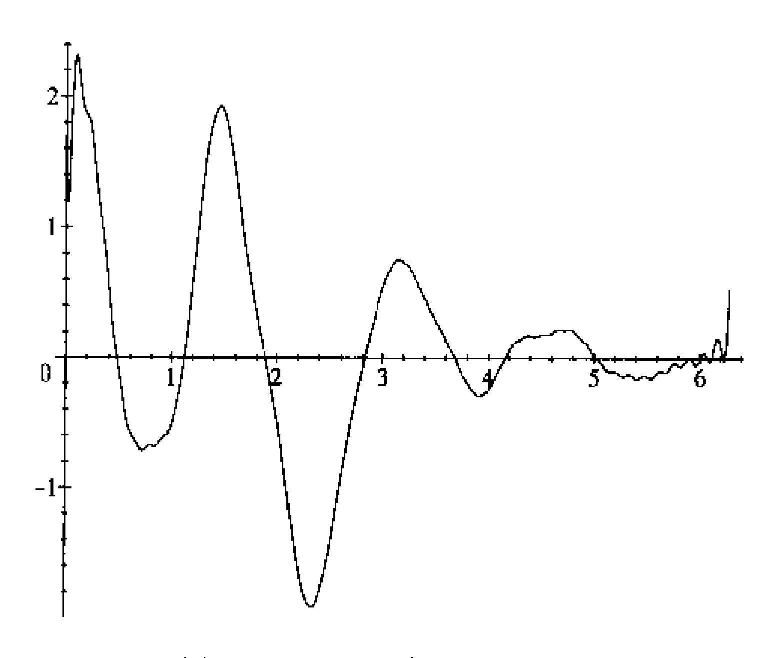


图 3.7　用 FFT 压缩 80%后的信号

原信号y与压缩信号yc之间的相对误差为：

$$\text{相对误差} = \frac{\|y-yc\|_{l^2}}{\|y\|_{l_2}} = 0.1018$$

通过附录 B 的 MATLAB 代码可了解如何用 MATLAB 计算相对误差。

3.1.4 傅里叶变换的 FFT 近似

FFT 的一个非常重要的应用是计算函数f的傅里叶变换的数值近似，其中f定义于$a\leqslant t\leqslant b$上，且以T为间隔进行了等间隔取样[即在$a, a+T, a+2T,\cdots,a+(n-1)T=b-T$处取样，这里$T=(b-a)/n$]。设函数$f$在区间$[a,b]$外为 0，在$a\leqslant t<b$上连续，且满足$f(b)=f(a)$。因为大多数信号是非周期信号，因此$f(b)=f(a)$的假设将导致信号在$t=b$处不连续，当信号由傅里叶系数重构时，将引发 Gibbs 现象。

f的傅里叶变换为：

$$\hat{f}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b f(t)e^{-i\omega t}\,dt$$

下面要进行变量替换，使积分的上下限由a至b变为0至2π。令$\theta=2\pi\frac{t-a}{b-a}$（或$t=a+(b-a)\theta/2\pi$），于是$\hat{f}$为：

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega)&=\frac{b-a}{(2\pi)^{3/2}}\int_0^{2\pi}f(a+(b-a)\theta/(2\pi))e^{-i\omega(a+(b-a)\theta/(2\pi))}\,d\theta\\&=\frac{b-a}{(2\pi)^{3/2}}e^{-i\omega a}\int_0^{2\pi}f(a+(b-a)\theta/(2\pi))e^{-i\frac{(b-a)\omega}{2\pi}\theta}\,d\theta\end{aligned}$$

注意，若定义函数g和频率ω_k为

$$g(\theta):=f(a+(b-a)\theta/(2\pi)) \quad \text{和} \quad \omega_k=\frac{2\pi}{b-a}k$$

那么$\hat{f}(\omega_k)$就变成：

$$\hat{f}(\omega_k)=\frac{b-a}{\sqrt{2\pi}}e^{-i\omega_k a}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(\theta)e^{-ik\theta}\,d\theta\right\}=\frac{b-a}{\sqrt{2\pi}}e^{-i\omega_k a}\hat{g}_k$$

这里的$\hat{g}_k$是g的第k个傅里叶级数的系数。

离散傅里叶变换（DFT）与傅里叶级数的系数之间的关系前面已讨论过，首先，令

$$y_j:=g\Big(j\underbrace{\frac{2\pi}{n}}_{h}\Big)=f\Big(a+j\underbrace{\frac{b-a}{n}}_{T}\Big),\quad j=0,\cdots,n-1$$

那么这个y_j就是f在$a+jT$时的取样值。$\hat{g}_k$的 DFT 近似为$\hat{y}_k/n$。这意味着y_j的 DFT 与$\hat{f}$的关系是：

$$\hat{f}(\omega_k) \approx \frac{b-a}{n\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega_k a} \hat{y}_k = \frac{T}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega_k a} \hat{y}_k \tag{3.6}$$

应用（3.6）式就可以用f的值近似其傅里叶变换在频率为ω_k处的值、此处的f是已取样后的。

3.1.5 应用 1——参数辨识

作为离散傅里叶变换的应用，考虑预测建筑物在风或外力作用下的摇摆问题。建筑物尤其是高层建筑，在风的作用下会摇摆和振动，这很常见而且难以避免，但过于剧烈的摇摆和振动会引起建筑物的结构损伤。如何知道在强风下其结构的变化？由建筑物的水平位移u和风力f构成的一个粗略的模型如下所示：

$$au'' + bu' + cu = f(t) \tag{3.7}$$

这里的a、b和c为正的常量，且有$b^2 - 4ac < 0$。这是一个很普通的差分方程。但问题是a、b和c均未知，所以不得不通过实验来确定它们。

实验可以这样做，用汽锤敲击一面墙，记下墙的响应。汽锤的冲击力可表示为$f(t) = f_0\delta(t)$，这里的$\delta(t)$是 Dirac 函数，f_0是冲击力。对于像 Dirac 函数这样的信号，其全部作用力等于1，同时持续时间极短。从理论上讲，δ 函数是当$h \mapsto 0$时f_h的极限，如图 3.8 所示。相应的冲击响应u为（见参考文献[3]的第 6.4 节）：

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \dfrac{f_0}{\omega a} \sin(\omega t) e^{-\mu t} & t \geqslant 0 \end{cases} \tag{3.8}$$

这里，$\omega = \dfrac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$，$\mu = \dfrac{b}{2a}$

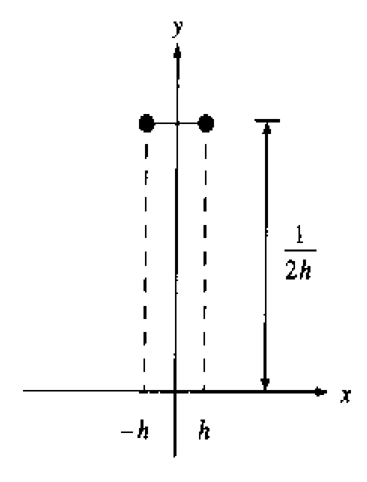


图 3.8 f_h的图形

下面的问题就是要研究在不同时段用汽锤敲击建筑物后，建筑物的位移（摇摆）

是多少，即函数u的曲线。理论上讲，频率ω是由该曲线、衰减量μ和幅度$f_0/(\omega a)$决定的。因为f_0已知（汽锤的作用力），参数a可由幅度$f_0/(\omega a)$和ω确定。参数b和c可由等式$\omega = \dfrac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$和$\mu = \dfrac{b}{2a}$确定（两个等式两个未知量）。

该方法存在的问题是，实际测到的数据（位移的量测值）与由（3.8）式得到的理论值μ有所不同。量测数据中包含高频噪声。前述模型中用到的线性差分方程和δ函数只是对相应的物理系统和汽锤的实际作用力的粗略近似。实际系统中小的非线性和持续一段时间的冲击都将使得μ的理论值与量测值有所出入。于是，频率ω就很难直接从量测数据中推断出来。

若能去掉前面提到的这些不利因素，ω的近似值还是可以得到的。在此，离散傅里叶变换起着决定性的作用。频率ω应是最大的频率分量，这个频率分量可通过计算量测数据的离散傅里叶变换得到。通过分析量测数据的幅度可得到衰减量μ的近似值。于是根据上文给出的公式，参数a、b和c的近似值也就确定下来了。这个问题的进一步讨论见习题 3~6。

3.1.6 应用 2——差分方程的离散化

下面研究 DFT 的另外一个应用，考虑（3.7）式的差分方程。令f是一个连续的、以2π为周期的t的函数。若对任意的t，$f(t)$已知，用通常的分析方法即可得到该式的惟一解（见参考文献[3]的 3.7.2 节）。若仅在$t_j = 2\pi j/n$，$n \geqslant 1$时f已知，那么这个通常的方法不再适用。

把差分方程离散化后再行研究，而不是直接研究其本身。离散化的方法有多种。当$h = 2\pi/n$，用下面的近似式进行离散化：

$$u'(t) \approx \frac{u(t)-u(t-h)}{h}$$

$$u''(t) \approx \frac{u(t+h)+u(t-h)-2u(t)}{h^2}$$

令$t_k = 2\pi k/n$，$u_k = u(t_k)$，$0 \leqslant k \leqslant n$。因为$u$是周期的，所以$u_n = u_0$。当$t = t_k$时，上述差分方程变成：

$$u'(t_k) \approx \frac{u_k - u_{k-1}}{h} \tag{3.9}$$

$$u''(t_k) \approx \frac{u_{k+1}+u_{k-1}-2u_k}{h^2} \tag{3.10}$$

这里$1 \leqslant k \leqslant n-1$。把以上两式代入差分方程式（3.7）式，合并同类项后，有（见习题 10）：

$$\alpha u_{k+1} + \beta u_k + \gamma u_{k-1} = h^2 f_k, \quad 1 \leqslant k \leqslant n-1 \tag{3.11}$$

这里$f_k = f(2\pi k/n)$, $\beta = ch^2 + bh - 2a$, $\gamma = a - bh$。

设$u \in \mathcal{S}_n$是差分方程(3.11)式的一个解。令$\hat{u} = \mathcal{F}[u]$和$\hat{f} = \mathcal{F}[f]$以及$w = \exp(2\pi i/n)$。对(3.11)式两端进行DFT，并应用定理3.4的第1部分，得到(见习题11)：

$$\hat{u}_j = h^2(aw^j + \beta + \gamma\overline{w}^j)^{-1}\hat{f}_j \tag{3.12}$$

此处假设$aw^j + \beta + \gamma\overline{w}^j$不为0(见习题12)。有了$\hat{u}$，对它进行逆DFT即得到$u$。

当然还有一些其他的方法来得到u_k[解(3.11)式的线性方程]。然而，常常需要解的频率响应，此时，(3.12)式就直接给出了它的离散傅里叶变换。

3.2 离散信号

模拟信号经过取样后得到离散的数字序列$x = (\cdots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, \cdots)$，$x_k$的指标$k$相当于离散的时间。离散信号又称为时间序列。本节将讨论有关傅里叶分析(第2章)的离散形式。

3.2.1 时不变和离散线性滤波器

2.3.1节中研究了连续时不变滤波器，本节将考虑其离散形式。首先定义序列x的时不变算子T_p：

$$[T_p(x)]_k = x_{k-p}$$

即算子T_p把序列x向右平移了p个单位。例如，若$x_k = (1+k^2)^{-1}$，则$y = T_p(x)$成为$y_k = (1+(k-p)^2)^{-1}$。注意，T_p是线性算子。

为免于讨论无限序列的收敛问题，我们暂时令序列是有限的，即仅考虑当$|k| > K$时有$x_k = 0$的序列，这里的K是某个正数。

定义 3.8 把序列x变换为序列y的线性算子$F: x \to y$是时不变的，如果$F(T_p(x)) = T_p(F(x))$。

该条件只不过是关于连续时间滤波器时不变条件(见定义2.13)的离散版本。

线性算子F完全取决于如何对单位序列e^n进行变换，这里：

$$e_k^n = \begin{cases} 0 & k \neq n \\ 1 & k = n \end{cases}$$

为什么？因为x的第k个分量是和式$\sum_{n\in Z} x_n e_k^n = x_k$，所以序列$x$可写成和式$x = \sum_{n\in Z} x_n e^n$。$F$的线性意味着

$$F(x) = \sum_{n\in Z} F(x_n e^n) = \sum_{n\in Z} x_n F(e^n) \tag{3.13}$$

所以若已知F在e^n处的值，则F就完全确定。

令$f^n = F(e^n)$是e^n经F变换后的值。若F是时不变的，那么

$$\begin{aligned} T_p(f^n) &= T_p(F(e^n)) \\ &= F(T_p(e^n)) \quad \text{由时不变} \\ &= F(e^{n+p}) \quad (\text{见习题 } 1) \end{aligned}$$

因此，

$$T_p(f^n) = f^{n+p} \tag{3.14}$$

由T_p的定义可知$(T_p(f^n))_k = f_{k-p}^n$。因此，(3.14)式成为$f_k^{n+p} = f_{k-p}^n$。若令$n=0$，那么$f_k^p = f_{k-p}^0$。用n取代p，有：

$$f_k^n = f_{k-n}^0$$

同时，由(3.13)式有：

$$F(x)_k = \sum_{n\in Z} x_n \underbrace{F(e^n)_k}_{f_k^n}$$

因为$f_k^n = f_{k-n}^0$，所以有：

$$F(x)_k = \sum_{n\in Z} x_n f_{k-n}, \quad \text{其中} \quad f := f^0$$

比较上式与连续时的定理 2.17 中的时不变算子。定理 2.17 中的算子是把两个连续函数(见定义 2.9)做卷积。若用求和取代连续卷积中的积分，即得到上式。下面定义两序列的离散卷积。

定义 3.9（离散卷积） 序列x和y，其卷积$x*y$定义为：

$$(x*y)_k = \sum_{n\in Z} x_{k-n} y_n \tag{3.15}$$

若其中序列均绝对收敛。

本节分析的主要内容可归纳为以下定理。

定理 3.10　若 F 是作用于序列的时不变线性算子，具有卷积形式，即若有绝对收敛的序列 f，则

$$F(x) = f * x$$

反之，若 $F(x) = f * x$，则 F 是一个离散的时不变线性算子。

这样的卷积算子又称为离散滤波器。满足 $F(e^0) = f$ 的序列 f 是在时刻 0 对某个"冲击"的响应，称为冲击响应（IR）（参见定理 2.17 的证明）。若 f 的非零项数有无穷多个，则称 f 为无限冲击响应（IIR）；若 f 仅有有限个非零项，则称 f 为有限冲击响应（FIR）。

3.2.2　Z 变换和转移函数

本节将导出 l^2 上的无限序列的离散傅里叶变换，称为 Z 变换。Z 变换与傅里叶级数的复形式之间存在确定的关系式。第 7 章中还会再次遇到 Z 变换。

前面已讨论过，l^2 是能量有限的序列空间（复值），即对序列 $x = (\cdots, x_{-1}, x_0, x_1, \cdots)$，有 $\sum_n |x_n|^2 < \infty$。l^2 上的序列 x 和 y 的内积为 $\langle x, y\rangle = \sum_n x_n\overline{y_n}$。

定义 3.11　序列 $x = (\cdots, x_{-1}, x_0, x_1, \cdots) \in l^2$ 的 Z 变换定义为，函数 $\widehat{x} : [-\pi, \pi] \to C$：

$$\widehat{x}(\phi) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} x_j e^{-ij\phi}$$

通常，在 $\widehat{x}(\cdot)$ 的定义中令 $z = e^{i\phi}$，于是 $\widehat{x}$ 成为：

$$\widehat{x}(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} x_j z^{-j}$$

这就是 Z 变换名称的来历。

由 Z 变换可得到对有限序列的离散傅里叶变换的定义。为此，设 $x = x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}$ 是一个有限的序列（所以当 $j < 0$ 和 $j \geqslant n$ 时，$x_j = 0$）。把复角的定义 $\phi = \dfrac{2\pi k}{n}$ 代入 Z 变换中，得到：

$$\widehat{x}\left(\frac{2\pi k}{n}\right) = \sum_{j=0}^{n-1} x_j e^{\frac{-ijk2\pi}{n}} = \sum_{j=0}^{n-1} x_j \overline{w}^{jk},$$

这里 $w = e^{\frac{2\pi i}{n}}$。右边是 $\widehat{x}_k$ 的定义——x 的离散傅里叶变换的第 k 项系数。

与傅里叶级数的关系。Z变换与傅里叶级数之间有一个非常重要的关系式。对给定的$f \in L^2[-\pi,\pi]$，其傅里叶级数为：

$$f(\phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{in\phi}$$

这里的x_n是f的第k项傅里叶系数：

$$x_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi) e^{-in\phi}\, d\phi$$

由$\widehat{x}$的定义，有：

$$\widehat{x}(\phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-in\phi} = f(-\phi) \tag{3.16}$$

于是，求傅里叶级数就是一个把函数$f \in L^2[-\pi,\pi]$转换成序列$\{x_n\} \in l^2$的过程；而Z变换则是把序列$\{x_n\}$变回函数f的过程。下图表示了这二者之间的关系。

$$\begin{array}{ccc} f \in L^2[-\pi,\pi] & \xrightarrow{\quad\text{傅里叶级数}\quad} & \{x_n\} \in l^2 \\ f(-\phi) = \widehat{x}(\phi) \in L^2[-\pi,\pi] & \xleftarrow{\quad Z\text{变换}\quad} & \{x_n\} \in l^2 \end{array}$$

L^2与l^2的等距同构。Z变换与傅里叶级数之间更深层次的联系是由Parseval定理[见（1.39）式]给出的。若x_n和y_n是$f, g \in L^2[-\pi,\pi]$的傅里叶系数，那么

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \overline{y_n} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi)\overline{g(\phi)}\, d\phi \quad \text{由(1.39)式} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{x}(-\phi)\overline{\widehat{y}(-\phi)}\, d\phi \quad \text{由(3.16)式} \end{aligned}$$

进行变量替换$\phi \to -\phi$，有：

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{x}(\phi)\overline{\widehat{y}(\phi)}\, d\phi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \overline{y_n}$$

或者有：

$$\frac{1}{2\pi} \langle \widehat{x}, \widehat{y} \rangle_{L^2[-\pi,\pi]} = \langle x, y \rangle_{l^2}$$

这里$x = (\cdots, x_{-1}, x_0, x_1, \cdots)$，$y = (\cdots, y_{-1}, y_0, y_1, \cdots)$。把以上讨论的总结为下面的定理。

定理 3.12 Z变换是l^2与$L^2[-\pi,\pi]$之间的一个等距同构（除了因子$1/2\pi$外，保持内积不变）。若$x=(\cdots,x_{-1},x_0,x_1,\cdots)$，$y=(\cdots,y_{-1},y_0,y_1,\cdots)$是$l^2$上的序列，那么：

$$\frac{1}{2\pi}\langle\widehat{x},\widehat{y}\rangle_{L^2[-\pi,\pi]}=\langle x,y\rangle_{l^2}$$

卷积．下面讨论卷积算子和Z变换之间的关系。前面已提到过，这里的离散卷积算子同连续卷积算子类似，以下的定理把此相似性明确下来（与定理 2.10 做比较）。

定理 3.13 设$f=\{f_n\}$和$x=\{x_n\}$是l^2上的序列。那么

$$\widehat{(f*x)}(\phi)=\widehat{f}(\phi)\widehat{x}(\phi)$$

函数$\widehat{f}(\phi)$是序列f的Z变换，也称为与算子F相应的转移函数，这里$F(x)=f*x$通常用相应的序列f确定卷积算子F，因此也就确定了它们的转移函数（即用$\hat{f}$定$\widehat{F}$）。

证明 由Z变换的定义有：

$$\widehat{(f*x)}(\phi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(f*x)(n)e^{-in\phi}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}f_kx_{n-k}\right)e^{-in\phi}$$

因为$e^{-in\phi}=e^{-ik\phi}e^{-i(n-k)\phi}$，则有：

$$\begin{aligned}\widehat{(f*x)}(\phi)&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}f_ke^{-ik\phi}x_{n-k}e^{-i(n-k)\phi}\\&=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f_ke^{-ik\phi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_{n-k}e^{-i(n-k)\phi}\end{aligned}$$

上式中已交换了求和的次序。在第 2 个和式中用把指标$n-k$用m取代，则上式成为：

$$\widehat{(f*x)}(\phi)=\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}f_ke^{-ik\phi}\right)\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}x_me^{-im\phi}\right)=\widehat{f}(\phi)\widehat{x}(\phi)$$

证毕。

卷积算子的伴随算子。前面已经讨论过，算子$F:l^2\to l^2$的伴随算子是$F^*:l^2\to l^2$，定义如下（见定义 0.29）：

$$\langle F(x),y\rangle=\langle x,F^*(y)\rangle\quad x,\ y\in l^2$$

下面的定理给出卷积算子的伴随算子的计算公式。

定理3.14 设F是序列f_n的卷积算子，那么F^*是序列$f_n^* = \overline{f}_{-n}$的卷积算子。$F^*$的转移函数是$\overline{\widehat{F}}(\phi)$。

证明 由卷积和l^2的定义，得到：

$$\begin{aligned}\langle F(x), y\rangle_{l^2} &= \langle f * x, y\rangle_{l^2} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (f * x)_n \overline{y}_n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_{n-k} x_k \overline{y_n} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \overline{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{f_{-(k-n)}} y_n}\end{aligned}$$

$\overline{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{f_{-(k-n)}} y_n}$就是$(f^* * y)(k)$，这里$f^*(m) = \overline{f}_{-m}$。因此有：

$$\langle F(x), y\rangle_{l^2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \overline{(f^* * y)(k)} = \langle x, (f^* * y)\rangle_{l^2}$$

因为由定义有$\langle F(x), y\rangle = \langle x, F^*(y)\rangle$，所以$F^*(y) = (f^* * y)$，这里$f_m^* = \overline{f}_{-m}$，证毕。

定理的第2部分可由第1部分得出，因为

$$\begin{aligned}\widehat{F^*}(\phi) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n^* e^{-in\phi} \quad （由\ \widehat{}\ 的定义） \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{f}_{-n} e^{-in\phi} \quad （由定理第1部分） \\ &= \overline{\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_{-n} e^{in\phi}} \\ &= \overline{\sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m e^{-im\phi}} \quad （令\ m=-n） \\ &= \overline{\widehat{F}}(\phi)\end{aligned}$$

证毕。

3.3 习题

下面的一些习题需要用到快速傅里叶变换(可用 Maple 或 MATLAB 的 FFT 函数实现之)。

1. 证明$T_p(e^n) = e^{n+p}$，这里的T_p和e^n见 3.2 节的定义。
2. 证明定理 3.4。
3. 推导(3.8)式(见参考文献[3]的 6.4 节)。
4. 画出(3.8)式中u的图形，已知$a = 1, b = 5, c = 37$和$f_0 = 1$。
5. 继续上题，用 MATLAB 或其他语言编程实现：在[0,4]上对u均匀地取 256 个样值点，画出u的 FFT系数的绝对值图形，确定最大的自然频率$\omega/2\pi$。同上一习题的结果做比较。
6. FFT 具有最佳的频域局部化特性。根据 FFT 数据，找到一个估计衰减量μ的方法。
7. 滤波。令

$$f(t) = e^{-t^2/10}(\sin(2t) + 2\cos(4t) + 0.4\sin(t)\sin(50t))$$

令$y_k = f(2k\pi/256)$, $k = 1, \cdots, 256$对f进行离散化。用快速傅里叶变换计算$\widehat{y}_k$，$0 \leqslant k \leqslant 256$。由定理 3.4 可知，$y_{n-k} = \overline{y}_k$。这样，当$m$的值较小时，$\widehat{y}_0, \cdots, \widehat{y}_m$和$\widehat{y}_{256-m}, \cdots, \widehat{y}_{256}$就是低频系数。对$m = 6$，令$\widehat{y}_k = 0$，$m \leqslant k \leqslant 255 - m$，就滤除了高频分量，然后对这些修改后的系数$\widehat{y}_k$应用快速傅里叶逆变换，得到滤波后的$y_k$。画出滤波后的$y_k$并与原信号做比较。对$m$实验其他不同的值。
8. 压缩。令$tol = 1.0$。在习题 7 中，若$|\widehat{y}_k| < tol$，则赋$\widehat{y}_k$为 0。对这些修改后的系数$\widehat{y}_k$应用快速傅里叶逆变换，得到压缩后的y_k。画出压缩后的y_k并与原信号做比较。对tol实验其他不同的值，并画出滤除的傅里叶系数的百分比与tol之间的关系曲线。MATLAB 的sort函数在该过程中可以派上用场(见附录 B 中有关压缩的 MATLAB 程序段)。计算压缩信号与原信号的相对l^2误差(见附录 B 的 MATLAB 程序段)。
9. 在区间$0 \leqslant x \leqslant 1$上，用下面的函数重做以上两个习题

$$f(x) = -52x^4 + 100x^3 - 49x^2 + 2 + N(100(x - 1/3)) + N(200(x - 2/3))$$

这里，

$$N(t) = te^{-t^2}$$

此时，$y_k = f(k/256)$。
10. 在$t = t_k = 2\pi k/n$处，把(3.9)式和(3.10)式代入(3.7)式，导出(3.11)式。

11. 设$aw^j+\beta+\gamma\overline{w}^j$不为0，推导(3.12)式。

12. 设a, b, c和$4ac-b^2$是正数。如(3.11)式所示，令$\beta=ch^2+bh-2a$和$\gamma=a-bh$。证明若$bh<2a$，则$aw^j+\beta+\gamma\overline{w}^j$不可能为0(提示：证明若$|z|=1$，则二次方程$az^2+\beta z+\gamma=0$没有解)。

13. 求$u''+2u'+2u=3\cos(6t)$以$\pi/3$为周期的精确解，并同那些在$n=16$，$n=64$和$n=256$处的离散近似解做比较。需要用到MATLAB等编程语言来计算FFT和IFFT。

14. 因为复指数$u=\exp(int)$是以2π为周期的算子$D^2[u]=u''$的特征函数(即$D^2[u]=-n^2u$)。该算子的离散形式可作用于$\mathcal{S}_n$上的周期序列。若u_k的周期为n，那么由下式定义$L[u]$：

$$L[u]_k=u_{k+1}+u_{k-1}-2u_k$$

(a) 证明L是由$\mathcal{S}_n$至$\mathcal{S}_n$的映射。

(b) 若$n=4$，证明代表L的矩阵M_4为：

$$M_4=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0 & 1\\ 1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 1\\ 1 & 0 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

(c) 求证M_4是自伴随的，即可对角化的。求其特征值和特征矢量。(3.2)式的F_4矩阵列矢量同上面的特征矢量有何关系？你能通过FFT把M_4矩阵对角化吗？请解释一下

(d) 求n为任意值时的结果(提示：对$L[u]_k$应用DFT，不要忘记FFT只是DFT的一个快速算法)。

15. (循环与DFT。) $n\times n$矩阵A称为循环阵，若各个对角线上的元素相同，且其指标是"模n"的。例如，下面的4×4矩阵即为循环阵：

$$\begin{pmatrix}9 & 2 & 1 & 7\\ 7 & 9 & 2 & 1\\ 1 & 7 & 9 & 2\\ 2 & 1 & 7 & 9\end{pmatrix}$$

(a) 考虑以n为周期的序列a，这里$a_\ell=A_{\ell+1,1}$，$\ell=0,\cdots,n-1$。根据序列a写出矩阵A的各元素。

(b) 令X是$n\times1$的列矢量。证明$Y=AX$等同于$y=a*x$，若x和y是周期为n的序列，即$x_\ell=X_{\ell+1,1}$和$y_\ell=Y_{\ell+1,1}$，$\ell=0,\cdots,n-1$。

(c)证明 DFT 可对角化任意的循环阵，即 $n^{-1}F_n^T A\bar{F}_n = D$，这里的$D$是对角阵 D中的各对角元是什么(即求A矩阵的特征值)?

16. 求序列

$$x = \left(\cdots \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad \tfrac{1}{2} \quad \tfrac{1}{4} \quad \cdots \quad \tfrac{1}{2^n} \quad \cdots \right)$$

的Z变换

第4章　Haar小波分析

4.1　小波的由来

小波最先在工程中被地球物理学家用来分析通过爆炸方法产生的人造地震数据，以便找油、探矿等，通过分析便可得到地表下的岩层“图像”。实质上，地球物理学家们只是再一次地发现小波而已，数学家们已在几十年前用它来解决一些抽象的问题，但一直没期望在信号处理领域中得以应用①。

地震法探矿产生的数据是许多的二维图像，层叠后以形成一个地表下岩层的三维图像。每一幅二维的图像信息通过排成线阵的传感器来获取，爆炸发生在线阵的一端，以产生地壳中的地震波。线阵中的每个传感器实时地收集由于爆炸而产生的地壳运动，记录下的就是地震数据（见图4.1）。

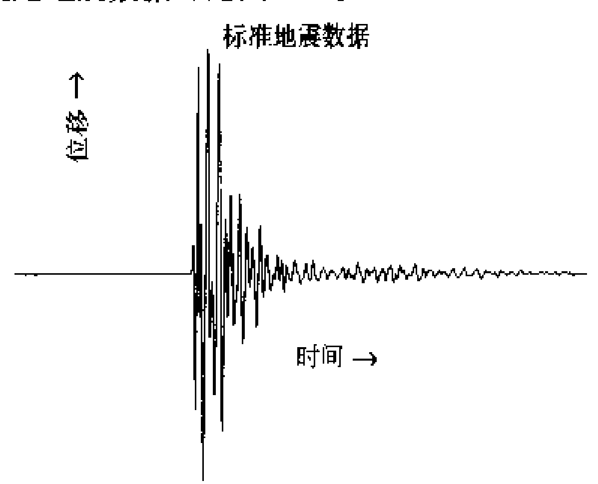


图4.1　一个典型的地震数据。横坐标是时间刻度，纵坐标是位移。振动频率及其发生的时刻都很重要

首先被传感器记录到的是沿着地表传播的直达波，这个一般不太重要。接下来的是地表下岩层的反射波，这些非常重要。波到达传感器的时间信息给出了反射岩层的位置，波的振动频率反映了该岩层的精细结构信息。把沿线各传感器收集的信息综合起来，就得到了该线阵下岩层的一幅二维图像。

用地震法探矿的关键是对收集来的信息是否有适合的信号分析方法。傅里叶分

---

① 见Meyer的书（参考文献[13]），那里有关于小波发展历史的有趣资料。

析在此不是一个好方法。它仅能提供频率信息（组成信号的正弦波），而并没有给出某个正弦波发生的时刻。另外一个方法——短时傅里叶变换（STFT）会好一些。整个时间域被分割成一些小的等时间间隔，然后分别用傅里叶变换分析之，结果显然包含了时间和频率信息。然而该方法还存在一些问题，由于时间间隔不可调，所以那些持续时间非常短的、频率很高的脉冲信号的发生时刻难以检测到。

下面谈谈小波，小波可以跟踪时间和频率信息。它可以"近看"前面提到的短时脉冲，或者"远眺"以检测长时慢变波。

4.2　Haar 小波

4.2.1　Haar 尺度函数

有两个函数在小波分析中起着非常重要的作用，即尺度函数 ϕ 和小波函数 ψ，这两个函数产生了一组可以用于分解和重构信号的函数族。在构造该函数族中，ϕ 有时称为"父小波"，ψ 称为"母小波"。

最简单的小波分析基于 Haar 尺度函数，如图 4.4 所示，其构筑块就是这个基本图形的平移和伸缩（在高度和宽度方向上）。

下面用例子说明该分析的基本思想。考虑图 4.2 中所示的信号，可认为是某一物理量的量测值（例如一个周期内的线电压）与时间的函数。图中的两个尖峰表示由于电压表连接不牢而产生的测量噪声，我们希望滤除该噪声。图 4.3 中显示了用 Haar 构筑块近似原信号的一种形式。高频噪声表示为高而窄的方块，如果有一个算法能检测到这个窄块，则有可能消除这个量测噪声并且对信号的其他部分无影响。

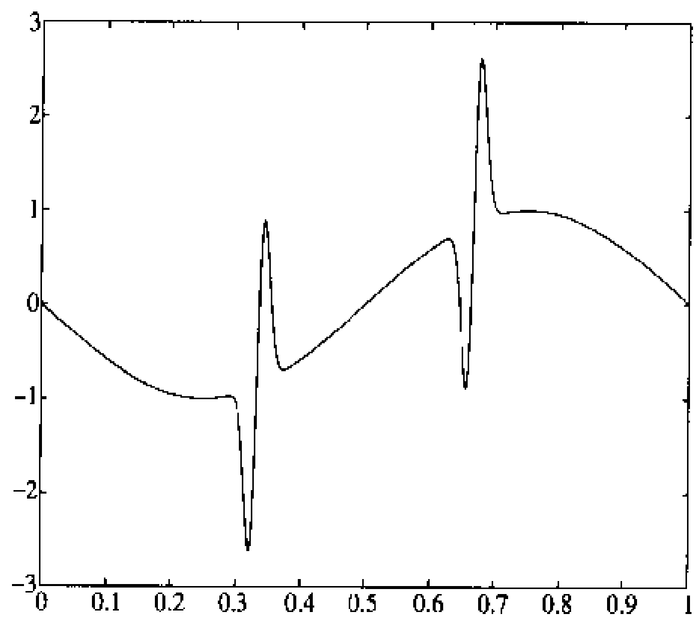


图 4.2　一个有故障的电压表的量测数据

用 Haar 尺度函数产生构筑块特别简单，并且可以示例多分辨分析的基本思想，因此下面我们将详细讨论之。Haar 小波的不足是它不连续，因此不能够很好地近似连续函数（图 4.3 实际上并没有很好地近似图 4.2）。在后面的章节中，还会介绍一些其他的小波。例如对于 Daubechies 小波，它是连续的，但还保持着像 Haar 小波那样的局部化特性。

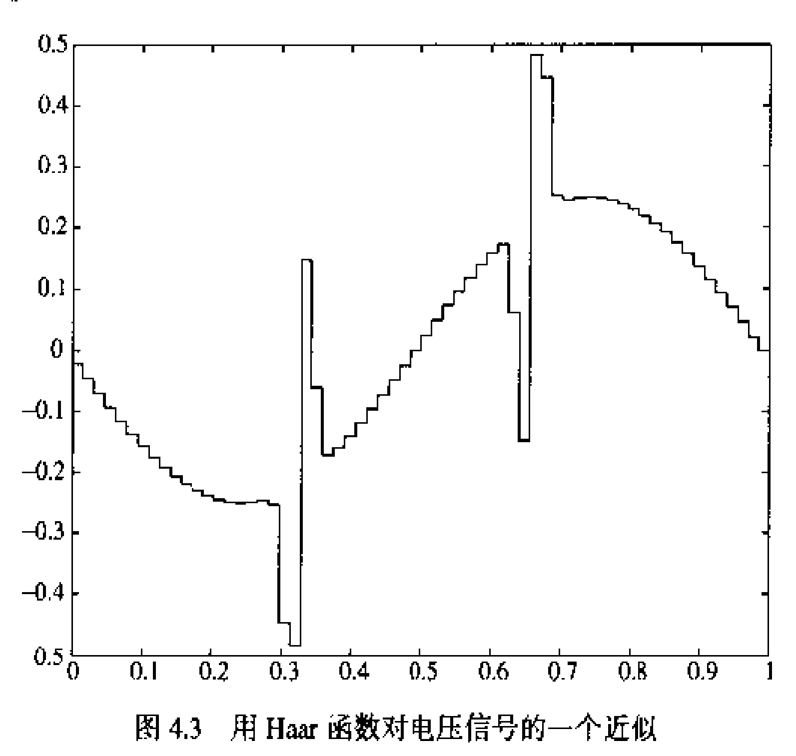


图 4.3 用 Haar 函数对电压信号的一个近似

4.2.2 Haar 尺度函数的基本特性

定义 4.1 Haar 尺度函数定义为：

$$\phi(x)=\begin{cases}1, & 若\ 0\leqslant x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

如图 4.4 所示。

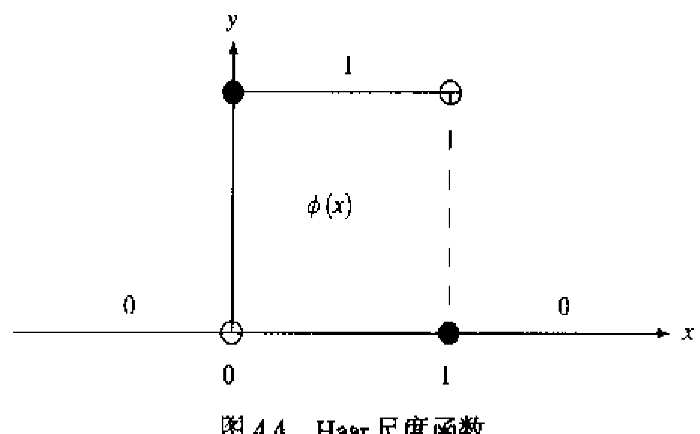


图 4.4 Haar 尺度函数

$\phi(x-k)$与ϕ的图形基本一样，只不过向右平移了k个单位（假设$k>0$）。令V_0是所有形如

$$\sum_{k\in Z} a_k\phi(x-k),\quad a_k\in R$$

的函数组成的空间，k可在任一有限的整数范围内取值。因为$\phi(x-k)$在$x=k$和$x=k+1$处不连续，换句话说，V_0是所有不连续点仅在整数集中的分段常量函数所组成的空间。因为k的取值范围有限，所以在某个有界集外V_0的元素为 0，这样的一个函数称为具有有限支撑或紧支撑的。V_0中一个典型的元素如图 4.5 所示。

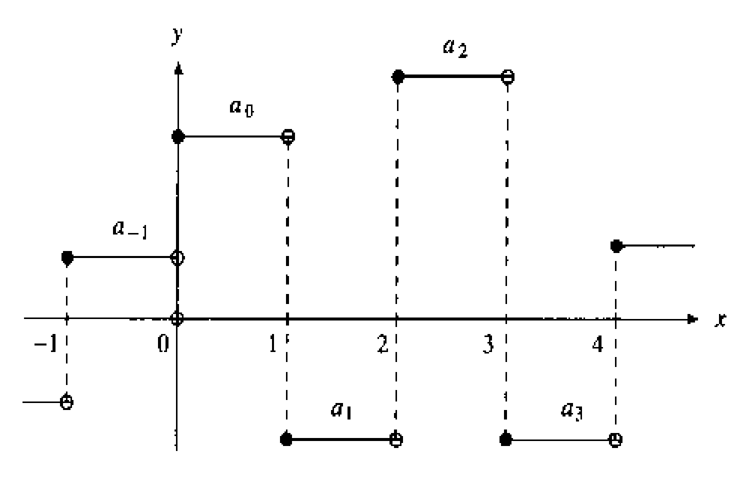


图 4.5　V_0中一个典型的元素

注意，V_0中的函数也可能在整数点处连续（例如，若$a_1=a_2$，则上述的和式在$x=2$处连续）。

例 4.2

下面的函数

$$f(x)=2\phi(x)+3\phi(x-1)+3\phi(x-2)-\phi(x-3)\in V_0$$

如图 4.6 所示。该函数在$x=0,1,3$和 4 处有间断点。

我们需要一个窄的构筑块去分析高频信号，该块的宽度应是ϕ的一半即$\phi(2x)$，如图 4.7 所示。

函数$\phi(2x-k)=\phi(2(x-k/2))$的图形与函数$\phi(2x)$的图形一样，只不过向右平移了$k/2$个单位。令$V_1$是由下列函数构成的空间：

$$\sum_{k\in Z} a_k\phi(2x-k)\quad a_k\in R$$

从几何上看，V_1是由紧支撑的分段常量函数构成的空间，其可能的间断点在半整数点处$\{0,\pm1/2,\pm1,\pm3/2,\cdots\}$。

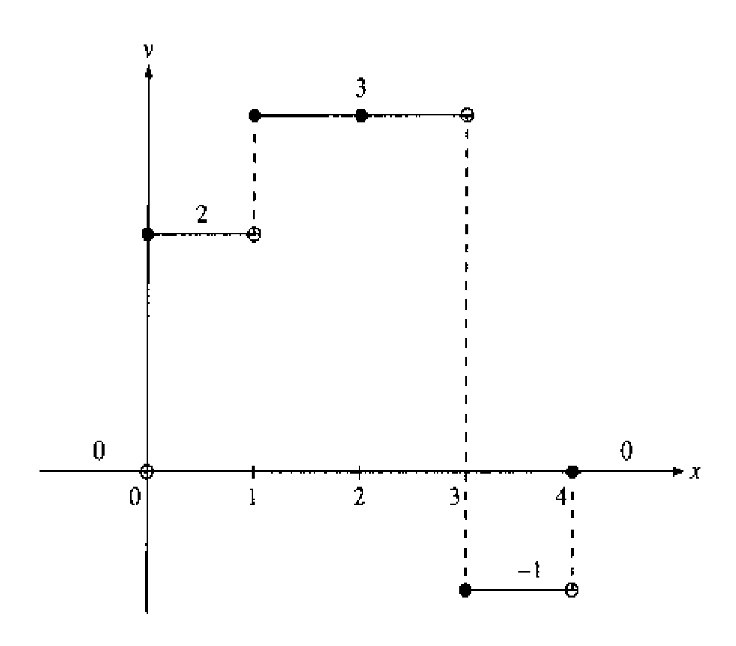


图 4.6　例 4.2 中的 f

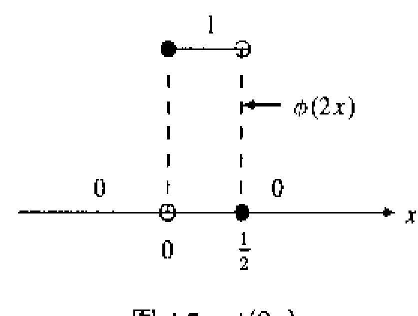


图 4.7　$\phi(2x)$

例 4.3

函数

$$f(x) = 4\phi(2x) + 2\phi(2x-1) + 2\phi(2x-2) - \phi(2x-3) \subset V_0$$

如图 4.8 所示，其间断点在 $x=0, 1/2, 3/2$和 2 处。

有以下更一般的定义。

定义 4.4　设 j 是一非负整数，j 级阶梯函数空间表示为V_j，它是由函数集

$$\{\cdots,\phi(2^j x+1),\phi(2^j x),\phi(2^j x-1),\phi(2^j x-2),\cdots\}$$

在实数域上张成的。V_j是紧支撑的分段常量函数空间，其间断点在下列集合中：

$$\{\cdots,-1/2^j,0,1/2^j,2/2^j,3/2^j,\cdots\}$$

V_0中的函数是在整数集上有间断点的分段常量函数，V_0中任何一个函数亦属于

V_1，而V_1的间断点在半整数集合$\{\cdots,-1/2,0,1/2,1,3/2,\cdots\}$中。依此类推，有：

$$V_0 \subset V_1 \subset \cdots V_{j-1} \subset V_j \subset V_{j+1} \cdots$$

这种包含关系是严格的。例如函数$\phi(2x)\in V_1$，但$\phi(2x)\notin V_0$[因为$\phi(2x)$在$x=1/2$处有间断点]。

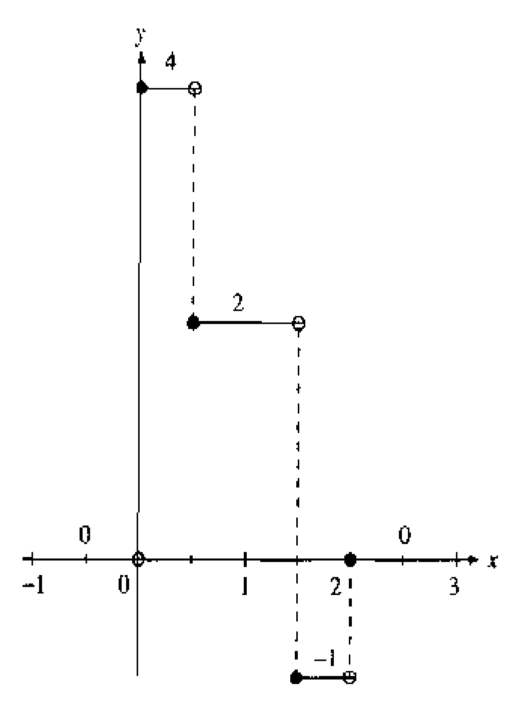


图 4.8　例 4.3 中的f

V_j包含所有在分辨率为2^{-j}下的相关信息。随着j的增加，分辨得更精细。$V_j \subset V_{j+1}$意味着随分辨率的提高，不会损失任何信息，该包含关系也说明了为什么V_j是以$\phi(2^j x)$形式而不是以$\phi(ax)$形式定义的。假如定义V_2用$\phi(3x-j)$而不是$\phi(4x-j)$即$\phi(2^2x-j)$，那么V_2将不包含V_1（因为$1/2$的倍数不在$1/3$的倍数集合中）。

4.2.3　Haar 尺度函数的基本性质

下列定理是以上定义的自然推广。

定理 4.5

（1）$f(x)\in V_0$，当且仅当$f(2^j x)\in V_j$；

（2）$f(x)\in V_j$，当且仅当$f(2^{-j}x)\in V_0$。

证明　下面证明定理的第一部分。若函数f属于V_0，则$f(x)$是$\{\phi(x-k),k\in Z\}$的线性组合，因此$f(2^j x)$是$\{\phi(2^j x-k),k\in Z\}$的线性组合，这说明$f(2^j x)$是V_j的一个元素。其逆的证明与第（2）部分的表述类似。

$\phi(2^j x)$的图形是宽度为$1/2^j$的尖峰。随j的增加，$\phi(2^j x)$的图形（经过适当的平

移）就与信号中的一个尖峰相似了，这正好是希望滤除的部分。于是希望有种算法能把信号分解到V_j的各个分量，这就是要构造V_j的一个标准正交基（用L^2内积）。

从V_0开始。该空间是由ϕ和其平移产生。每个$\phi(x-k)$有一个L^2上的单位范数，即

$$\|\phi(x-k)\|_{L^2}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x-k)^2\,dx = \int_k^{k+1} 1\,dx = 1$$

若j与k不同，则$\phi(x-j)$与$\phi(x-k)$的支撑集不相交（见图 4.9），因此，

$$\langle \phi(x-j), \phi(x-k)\rangle_{L^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x-j)\phi(x-k)\,dx = 0 \quad j \neq k$$

所以集合$\{\phi(x-k), k \in Z\}$是V_0的一个标准正交基。

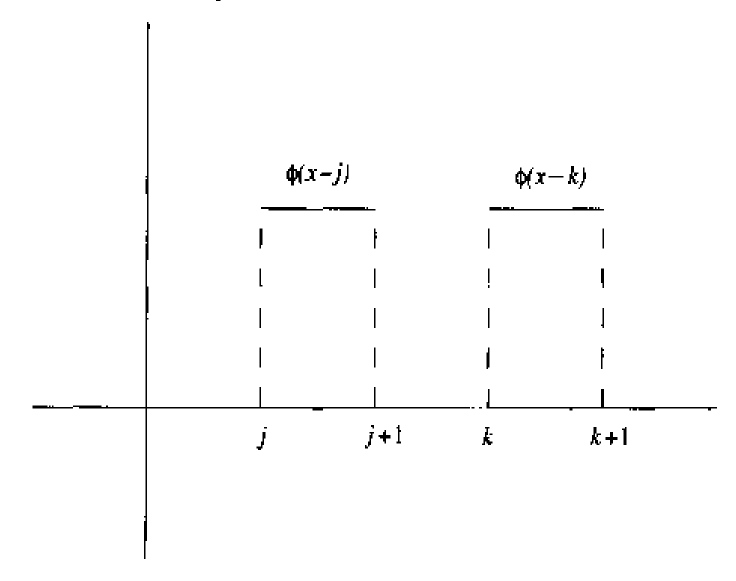


图 4.9 $\phi(x-j)$与$\phi(x-k)$的支撑集不相交

经过类似的讨论，可得到如下更一般的结论。

定理 4.6 函数集$\{2^{j/2}\phi(2^j x-k);\ k \in Z\}$是$V_j$的一个标准正交基。

[系数$2^{j/2}$的存在是因为$\int_{-\infty}^{\infty}(\phi(2^j x))^2\,dx = 1/2^j$。]

4.2.4 Haar 小波

有了V_j的正交基后只完成了一半的工作。为解决噪声滤除问题，需要一个孤立属于V_j但不属于V_{j-1}的尖峰的方法，于是引出了小波函数ψ。

该方法就是把V_j分解成V_{j-1}和其正交补。仍然从$j=1$开始，首先确定V_0的正交补。因为V_0是由ϕ及其平移系构成，所以有理由期望V_0的正交补也是由某个函数ψ及其平移系构成。以下是构造ψ的两个关键点：

1. ψ是V_1的成员，所以可表示为$\psi(x) = \sum_l a_l\phi(2x-l)$，$a_l \in R$（仅有有限个$a_l$非零）。

2. ψ与V_0正交，即$\int \psi(x)\phi(x-k)\,dx=0$对所有的整数$k$成立。

第1点意味着ψ是由宽度为1/2的块构建的（即图 4.7 的倍乘、平移）。从第2点中得到，若$k=0$，则$\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)\phi(x)\,dx=0$。符合以上两点的最简单的$\psi$如图 4.10 所示。它包括宽为1/2的两个块，可表示为：

$$\psi(x)=\phi(2x)-\phi(2(x-1/2))=\phi(2x)-\phi(2x-1)$$

显然满足第 1 点，而且

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x)\psi(x)\,dx&=\int_0^{1/2}1\,dx-\int_{1/2}^{1}1\,dx\\&=1/2-1/2\\&=0\end{aligned}$$

这样，ψ就与ϕ正交。若$k\neq 0$，则$\psi(x)$的支撑与$\phi(x-k)$的不重叠，于是$\int\psi(x)\phi(x-k)\,dx=0$。因此$\psi\in V_1$且$\psi\perp V_0$，这里的$\psi$称为Haar 小波。

定义 4.7 Haar 小波函数为：

$$\psi(x)=\phi(2x)-\phi(2x-1)$$

如图 4.10 所示。

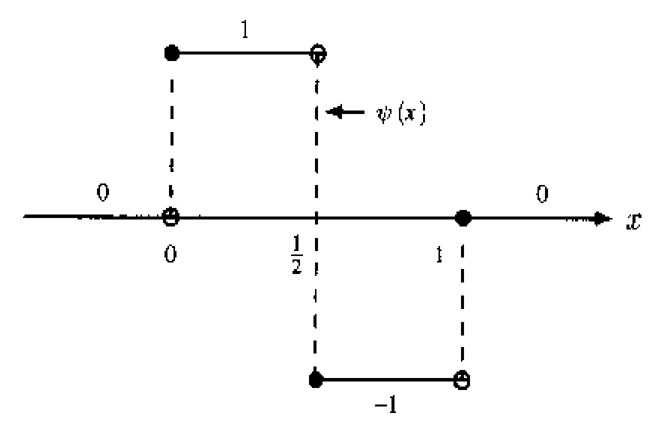


图 4.10 Haar 小波$\psi(x)$

可以证明（见习题 4），任一函数

$$f_1=\sum_k a_k\phi(2x-k)\in V_1$$

当且仅当

$$a_1=-a_0,\quad a_3=-a_2,\cdots$$

时，与V_0正交，即与每个$\phi(x-l),l\in Z$正交。

此时，

$$f_1 = \sum_{k\in Z} a_{2k}\left(\phi(2x-2k)-\phi(2x-2k-1)\right) = \sum_{k\in Z} a_{2k}\psi(x-k) \quad (4.1)$$

换句话说，当且仅当V_1中某一函数具有$\sum_k a_k\psi(x-k)$（把a_{2k}重新标记成a_k）形式时，则该函数与V_0正交。

令W_0是由下列函数构成的空间：

$$\sum_{k\in Z} a_k\psi(x-k) \quad a_k \in R$$

这里，再次假定只有有限个a_k非零。前面刚证明过W_0是V_0的正交补，或者说$V_1 = V_0 \oplus W_0$（由第1章可知，$\oplus$表示V_0与W_0相互正交）。

通过类似的过程，可得到以下更一般的结论。

定理 4.8 令W_j是由形如

$$\sum_{k\in Z} a_k\psi(2^jx-k) \quad a_k \in R$$

的函数构成的空间，设仅有有限个a_k非零。W_j是V_j的正交补，即

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j$$

证明 为证明本定理，只要证明以下两条事实：

（1）W_j中每个函数同V_j中每个函数正交。

（2）V_{j+1}中每个与V_j正交的函数属于W_j。

对于第1条，设$g = \sum_{k\in Z} a_k\psi(2^jx-k) \in W_j$，并且设$f \in V_j$，只要证明下式即可：

$$\langle g, f\rangle_{L^2} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\overline{f(x)}\,dx = 0$$

因为$f(x) \in V_j$，$f(2^{-j}x) \in V_0$，所以

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty}\sum_{k\in Z} a_k\psi(x-k)\overline{f(2^{-j}x)}\,dx \quad （因为\psi与V_0正交）$$

$$= 2^j\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{k\in Z} a_k\psi(2^jy-k)\overline{f(y)}\,dy \quad （令\ y=2^{-j}x）$$

$$= 2^j\int_{-\infty}^{\infty} g(y)\overline{f(y)}\,dy$$

因此，$g \perp f \in V_j$，第1条证毕。

因为已经证明了与V_0正交的V_1中的任一函数必是$\{\psi(x-k), k \in Z\}$的线性组合，所以由(4.1)式得到了$j=0$时的本定理的第(2)条事实，$j \neq 0$时的证明同$j=0$时的非常类似。

不断分解V_j，V_{j-1}，得到：

$$
\begin{aligned}
V_j &= W_{j-1} \oplus V_{j-1} \\
&= W_{j-1} \oplus W_{j-2} \oplus V_{j-2} \\
&\cdots \\
&= W_{j-1} \oplus W_{j-2} \oplus \cdots \oplus W_0 \oplus V_0
\end{aligned}
$$

所以V_j中的任一f可惟一地分解为以下的和式：

$$
f = w_{j-1} + w_{j-2} + \cdots + w_0 + f_0
$$

其中$w_l \in W_l$, $0 \leqslant l \leqslant j-1$且$f_0 \in V_0$。直观上讲，$w_l$表示宽为$1/2^{l+1}$的"尖峰"，且不能由其他宽度的尖峰的线性组合表示。

当j趋于无穷时，有怎样的情况？结论见下面的定理。

定理 4.9 $L^2(R)$能被分解为无限个正交直和：

$$
L^2(R) = V_0 \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus \cdots
$$

特别地，对每个$f \in L^2(R)$可惟一地写成：

$$
f = f_0 + \sum_{j=0}^{\infty} w_j
$$

这里$f_0 \in V_0$，$w_j \in W_j$。

无限直和应当视为有限直和的极限，即

$$
f = f_0 + \lim_{N \to \infty} \sum_{j=0}^{N} w_j \tag{4.2}
$$

这里的极限是指L^2意义上的极限。虽然该结论的证明已超出本书讨论的范围，但一些显而易见的事实还是可以给出。有两个特别重要的事实。首先，$L^2(R)$中任何函数可由连续函数近似（对此的一个直观的解释见引理 1.38）。其次，任何连续函数可被一阶梯函数任意逼近，其间断点在2^{-j}的倍数处（见图 4.11）。这样的阶梯函数，根据其定义，是属于V_j的。把以上两点事实结合起来，则定理 4.9 得证。

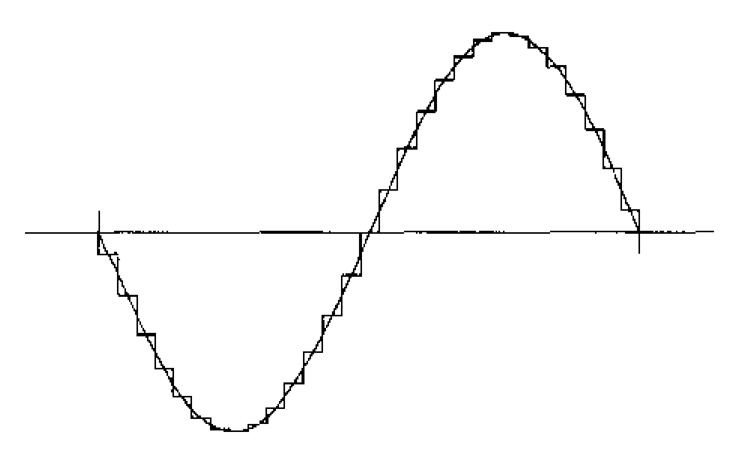


图 4.11 应用阶梯函数的近似

4.3 Haar 分解和重构算法

4.3.1 分解

到此，V_j已分解为V_0与W_l（$0 \leqslant l < j$）的直和，从理论上讲，噪声滤除问题已经解决了 首先，应用定理 4.9，f可由一阶梯函数$f_j \in V_j$（j足够大）近似。然后把f_j分解为：

$$f_j = f_0 + w_1 + \cdots + w_{j-1}, \quad w_l \in W_l$$

其中w_l表示宽为$1/2^{l+1}$的尖峰。当l足够大时，这样的尖峰也就窄得足以表示噪声了。例如，假设脉宽小于 0.01 的尖峰表示噪声。因为$2^{-6} < 0.01 < 2^{-7}$，那么任何w_j，$j \geqslant 6$均表示噪声。为了滤除该噪声，这些项要被设定为 0。和式的其余部分表示了一个同原信号非常近似的信号，只是已经没有噪声了。

为了实现这一理论算法，需要一个能有效地实现定理 4.9 给出的分解算法。第 1 步，用一如下式所示的阶梯函数近似原信号f：

$$f_j(x) = \sum_{l \in Z} a_l \phi(2^j x - l) \tag{4.3}$$

该过程就是对信号在$x = \cdots, -1/2^j, 0, 1/2^j, \cdots$处取样，从而得到$a_l = f(l/2^j)$，$l \in Z$，如图 4.11 所示 这里的$f$是连续信号，$f_j$是阶梯函数。这里的$j$要使网格$2^{-j}$足够小，从而能够捕获原信号的某些特性。$l$的范围取决于信号的定义域。若信号定义于$0 \leqslant x \leqslant 1$，则$l$的范围是$0 \leqslant l \leqslant 2^j - 1$，下文中，除非要讨论某个具体的问题，否则将不具体指出l的范围。

下面的任务是要把$\phi(2^j x - l)$分解为各个$W_l(l < j)$ 分量。需要如下的ϕ与ψ之间的关系式：

$$\phi(2x) = (\psi(x) + \phi(x))/2 \tag{4.4}$$

$$\phi(2x-1) = (\phi(x) - \psi(x))/2 \tag{4.5}$$

通过考察它们的图形易得上述关系式（见图 4.4 和图 4.10） 更一般地，有如下引理

引理 4.10　对所有的$x \in R$、下列关系式成立：

$$\phi(2^j x) \quad = \quad (\psi(2^{j-1}x) + \phi(2^{j-1}x))/2 \tag{4.6}$$

$$\phi(2^j x - 1) \quad = \quad (\phi(2^{j-1}x) - \psi(2^{j-1}x))/2 \tag{4.7}$$

在（4.4）式和（4.5）式中，用$2^{j-1}x$取代x，即得以上两式

该引理可用于分解$\phi(2^j x \quad l)$至各个$W_l(l < j)$ 分量、下面举例说明。

例 4.11

令f由图 4.12 给出，注意网格大小应为2^{-2}才能捕获f的所有细节特征。根据$\phi(2^2x - l)$，f可表示为：

$$f(x) = 2\ \phi(4x) + 2\phi(4x-1) + \phi(4x-2) - \phi(4x-3) \tag{4.8}$$

希望把f分解为W_1, W_0和V_0分量。在（4.6）式、（4.7）式中，令$j = 2$，则得到如下等式：

$$\phi(4x) = (\psi(2x) + \phi(2x))/2$$
$$\phi(4x-1) = (\phi(2x) - \psi(2x))/2$$
$$\phi(4x-2) = \phi(4(x-1/2)) = (\psi(2(x-1/2)) + \phi(2(x-1/2)))/2$$
$$\phi(4x-3) = \phi(4(x-1/2)-1) = (\phi(2(x-1/2) - \psi(2(x-1/2)))/2$$

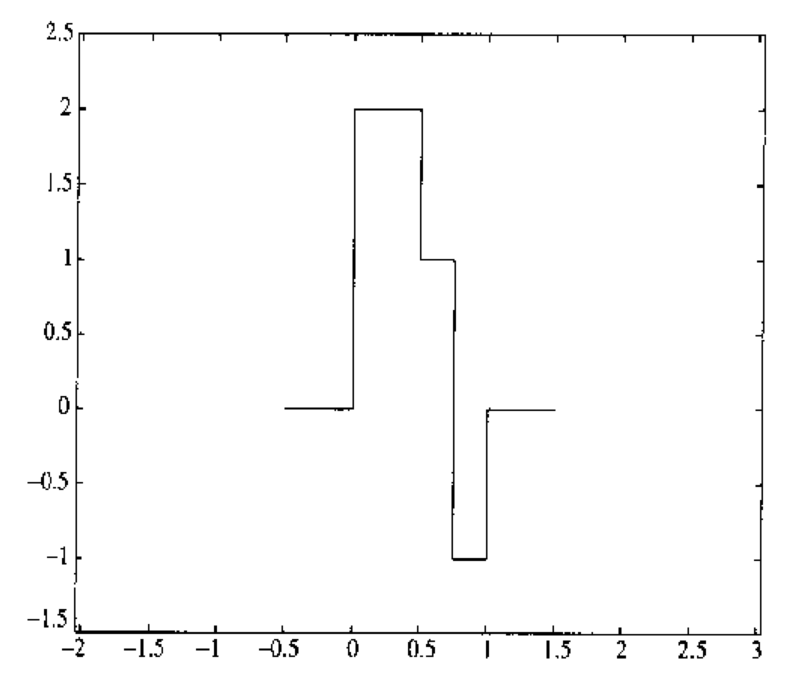


图 4.12　例 4.11 的图形

把以上这些等式与(4.8)式结合起来，然后合并同类项后，得到：

$$\begin{aligned} f(x) &= [\psi(2x)+\phi(2x)]+[\phi(2x)-\psi(2x)] \\ &\quad +[\psi(2x-1)+\phi(2x-1)]/2-[\phi(2x-1)-\psi(2x-1)]/2 \\ &= \psi(2x-1)+2\phi(2x) \end{aligned}$$

因为 W_1 是由 $\{\psi(2x-k);\ k\in Z\}$ 的线性组合张成的，所以 $f(x)$ 的 W_1 分量是 $\psi(2x-1)$，V_1分量是$2\phi(2x)$。应用公式$\phi(2x)=(\phi(x)+\psi(x))/2$，$V_1$分量可再次被分解为$V_0$ 和W_0分量，结果是：

$$f(x)=\psi(2x-1)+\psi(x)+\phi(x)$$

该式也可用几何方式验证，上式右边项分别是f的W_1、W_0和V_0 分量。

受本例的启发，得到一般的分解方案如下。首先把和式$f_j(x)=\sum_k a_k\phi(2^jx-k)$分解为偶部和奇部：

$$f_j(x)=\sum_{k\in Z}a_{2k}\phi(2^jx-2k)+\sum_{k\in Z}a_{2k+1}\phi(2^jx-2k-1) \tag{4.9}$$

接下来，在(4.6)式和(4.7)式中，用$x-k2^{1-j}$取代x：

$$\phi(2^jx-2k)=(\psi(2^{j-1}x-k)+\phi(2^{j-1}x-k))/2 \tag{4.10}$$

$$\phi(2^jx-2k-1)=(\phi(2^{j-1}x-k)-\psi(2^{j-1}x-k))/2 \tag{4.11}$$

把(4.10)和(4.11)式代入(4.9)式，得到：

$$\begin{aligned} f_j(x) &= \sum_{k\in Z}a_{2k}\left(\psi(2^{j-1}x-k)+\phi(2^{j-1}x-k)\right)/2 \\ &\quad +\sum_{k\in Z}a_{2k+1}\left(\phi(2^{j-1}x-k)-\psi(2^{j-1}x-k)\right)/2 \\ &= \sum_{k\in Z}\left(\frac{a_{2k}-a_{2k+1}}{2}\right)\psi(2^{j-1}x-k)+\left(\frac{a_{2k}+a_{2k+1}}{2}\right)\phi(2^{j-1}x-k) \\ &= w_{j-1}+f_{j-1} \end{aligned}$$

因为由定义，W_{j-1}是由$\{\psi(2^{j-1}x-k),\ k\in Z\}$的线性组合张成，所以右边的第 1 项$w_{j-1}$表示$f$的$W_{j-1}$分量。同样地，右边的第 2 项$f_{j-1}$表示$f$的$V_{j-1}$分量。总结上述分解算法于下面的定理。

定理 4.12 （Haar 分解）设

$$f_j(x)=\sum_{k\in Z}a_k^j\phi(2^jx-k)\ \in V_j$$

那么f_j可分解为：

$$f_j = w_{j-1} + f_{j-1}$$

这里，

$$w_{j-1} = \sum_{k \in Z} b_k^{j-1} \psi(2^{j-1}x - k) \in W_{j-1}$$

$$f_{j-1} = \sum_{k \in Z} a_k^{j-1} \phi(2^{j-1}x - k) \in V_{j-1}$$

其中，

$$b_k^{j-1} = \frac{a_{2k}^j - a_{2k+1}^j}{2} \qquad a_k^{j-1} = \frac{a_{2k}^j + a_{2k+1}^j}{2}$$

该分解过程可以接着用$j-1$取代j，继续把f_{j-1}分解为$w_{j-2} + f_{j-2}$。如此这般，得到：

$$f_j = w_{j-1} + w_{j-2} + \cdots + w_0 + f_0$$

总结以上分解过程。根据定理 4.9，信号首先被离散化从而产生一个近似信号$f_j \in V_j$，然后根据定理 4.12，把f_j分解为不同的频率分量：$f_j = w_{j-1} + w_{j-2} + \cdots + w_0 + f_0$。

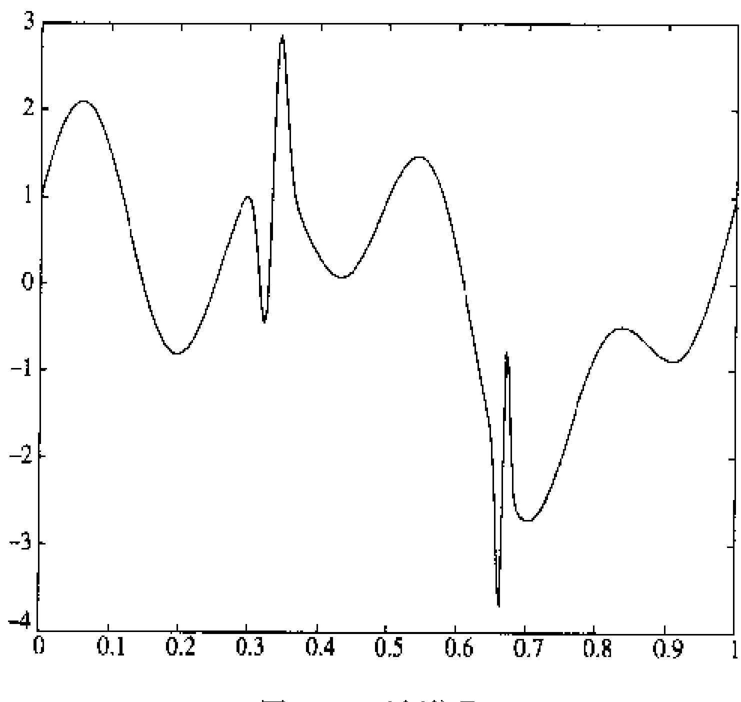


图 4.13　示例信号

例 4.13

考虑定义于单位区间$0 \leqslant x \leqslant 1$上的信号$f$，如图4.13 所示。因为宽为$1/2^8$的网格可以近似捕获该信号的基本特征，所以把原信号离散为2^8个样值点[所以$a_k^8 = f(k/2^8), 0 \leqslant k \leqslant 2^8 - 1$]。于是：

$$f_8(x) = \sum_{k=0}^{2^8-1} f(k/2^8)\phi(2^8x - k)$$

这样的近似足以达到本例的目的。应用定理 4.12，把f_8分解为V_j($j = 8, 7, \cdots, 0$)中各元素，$f_8 \in V_8$, $f_7 \in V_7$, $f_6 \in V_6$ 和 $f_4 \in V_4$ 分别如图 4.14、图 4.16、图 4.17 和图 4.18 所示。W_7的系数如图 4.15 所示，其中大部分系数均在 0 附近，只是在原信号的脉宽约为2^{-8}的尖峰的对应处($x \approx 0.3$和$x \approx 0.65$)幅度较大。

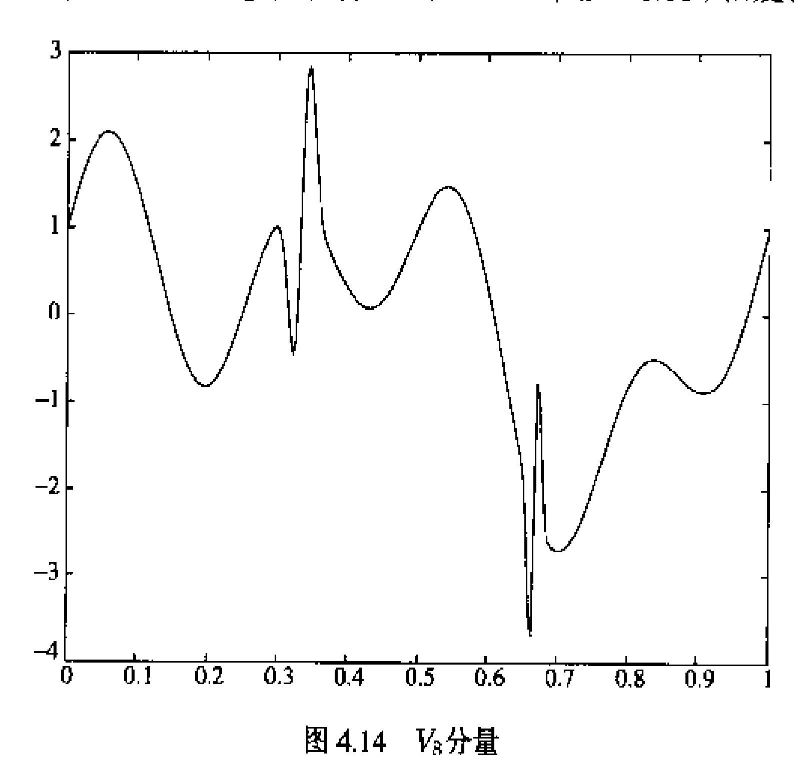


图 4.14 V_8分量

4.3.2 重构

到此，已把f分解为V_0和$W_{j'}$ ($0 \leqslant j' < j$) 各分量，下一步该如何呢？这取决于要达到什么目的。若是为了滤除噪声，那么相当于噪声的分量$W_{j'}$可以被丢弃，余下的信号将有很少的噪声。若是为了数据压缩，幅值较小的分量$W_{j'}$可以被丢弃而不会对原信号有太大的影响，仅仅显著的分量$W_{j'}$ (即较大的$b_k^{j'}$) 需被传输，从而可获得大的压缩比。当然，哪些算"小的"？这取决于在某个具体的应用下，对误差的规定。

不论以上哪种情况，到此$b_k^{j'}$已被修改过，接下来就需要一个重构算法(有时是在

信号的接收端），以便被压缩的信号或被滤波的信号能够根据V_j的基元素$\phi(2^jx-l)$重建，即：

$$f(x)=\sum_{l\in Z}a_l^j\phi(2^jx-l)$$

于是，f可由以高为a_l^j、宽为$l/2^j\leqslant x\leqslant(l+1)/2^j$的阶梯函数表示了。

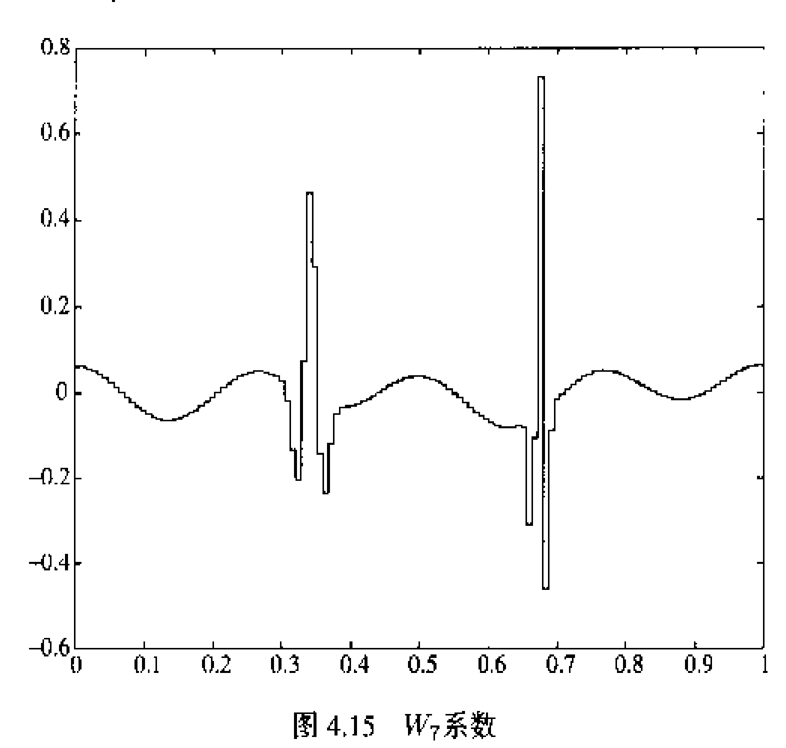


图 4.15　W_7系数

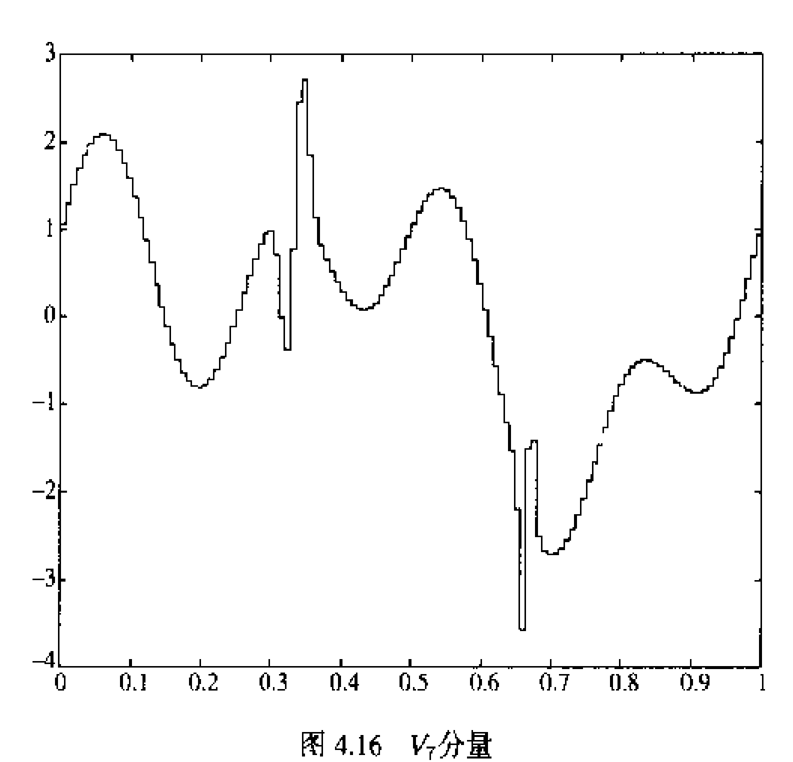


图 4.16　V_7分量

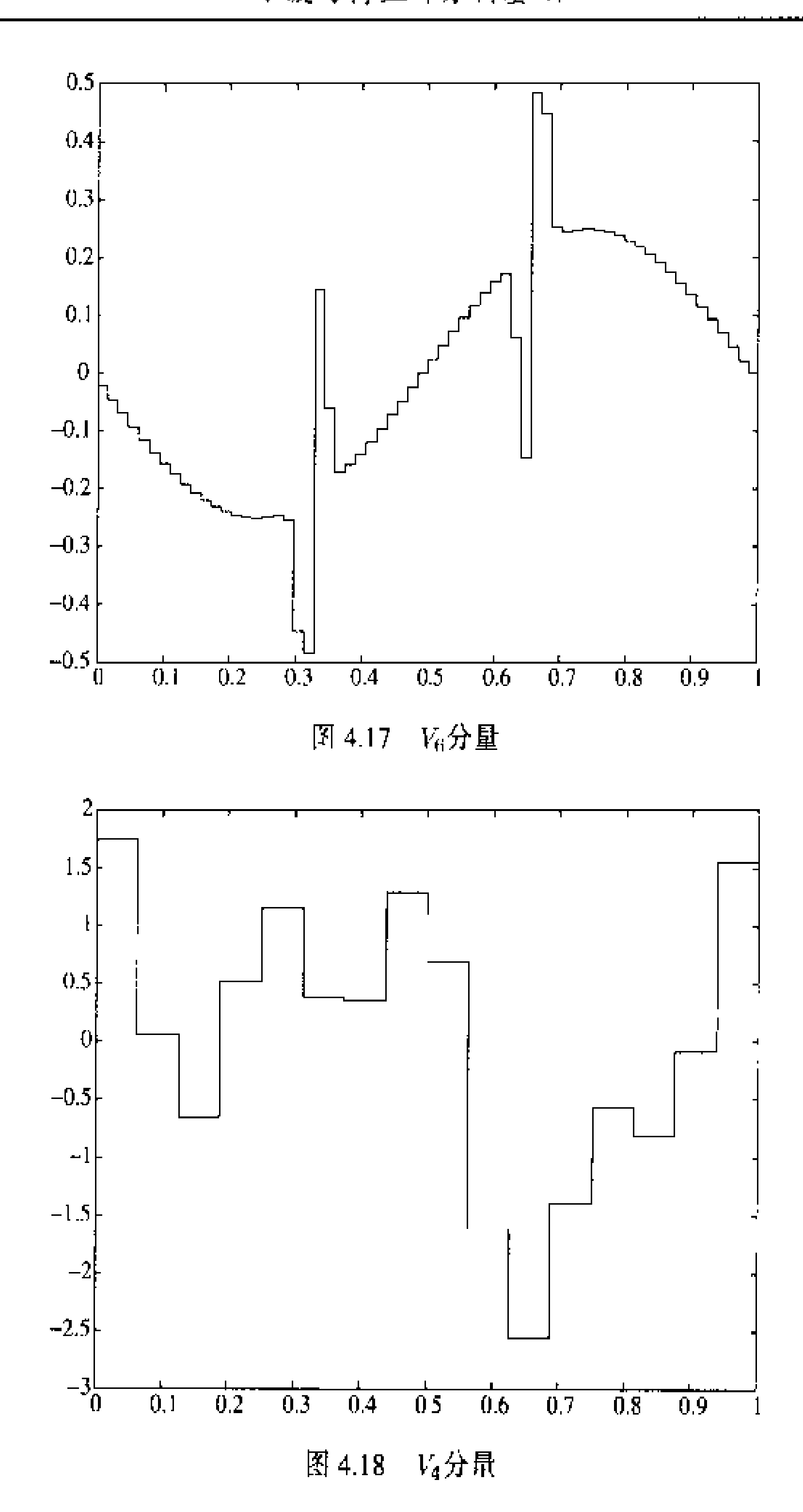


图 4.17 V_6分量

图 4.18 V_4分量

由如下形式的信号开始研究：

$$f(x) = f_0(x) + w_0(x) + \cdots + w_{j-1}(x) \quad w_l \in W_l$$

这里，

$$f_0(x) = \sum_{k \in Z} a_k^0 \phi(x-k) \in V_0 \text{ 且 } w_l = \sum_k b_k^l \psi(2^l x - k) \ \in W_l$$

其中$0 \leqslant l \leqslant j-1$、我们的目的是要把$f$重新表示为$f(x)=\sum_l a_l^j \phi(2^j x - l)$，而且要找到一个计算$a_l^j$的算法。应用下列等式：

$$\phi(x)=\phi(2x)+\phi(2x-1) \tag{4.12}$$

$$\psi(x)=\phi(2x)-\phi(2x-1) \tag{4.13}$$

这两个式子是根据$\phi(x)$与$\psi(x)$的定义推出的。用$2^{j-1}x$代替x得：

$$\phi(2^{j-1}x)=\phi(2^j x)+\phi(2^j x-1) \tag{4.14}$$

$$\psi(2^{j-1}x)=\phi(2^j x)-\phi(2^j x-1) \tag{4.15}$$

在(4.12)式中，用$x-k$代替x，得：

$$\begin{aligned} f_0(x) &= \sum_{k \in Z} a_k^0 \phi(x-k) \text{（由}f_0\text{的定义）} \\ &= \sum_{k \in Z} a_k^0 \phi(2x-2k) + a_k^0 \phi(2x-2k-1) \text{由（4.12）式} \end{aligned}$$

所以

$$f_0(x)=\sum_{k \in Z} \hat{a}_l^1 \phi(2x-l) \tag{4.16}$$

这里，

$$\hat{a}_l^1 = \begin{cases} a_k^0\text{、若}l=2k\text{ 是偶数} \\ a_k^0\text{、若}l=2k+1\text{ 是奇数} \end{cases}$$

类似地，$w_0=\sum_k b_k^0 \psi(x-k)$可重新写为[应用（4.13）式]

$$w_0(x)=\sum_{l \in Z} \hat{b}_l^1 \phi(2x-l) \tag{4.17}$$

这里，

$$\hat{b}_l^1 = \begin{cases} b_k^0, & \text{若}l=2k\text{ 是偶数} \\ -b_k^0, & \text{若}l=2k+1\text{是奇数} \end{cases}$$

结合(4.16)式和(4.17)式，有：

$$f_0(x)+w_0(x)=\sum_{l \in Z} a_l^1 \phi(2x-l)$$

这里，

$$a_l^1 = \hat{a}_l^1 + \hat{b}_l^1 = \begin{cases} a_k^0 + b_k^0, & 若 l = 2k 是偶数 \\ a_k^0 - b_k^0, & 若 l = 2k+1 是奇数 \end{cases}$$

接下来，把$w_1 = \sum_k b_k^1 \psi(2x-k)$用相同的方式加入到这个和式中[在（4.12）式和（4.13）式中用$2x-k$代替x]：

$$f_0(x) + w_0(x) + w_1(x) = \sum_{l \in Z} a_l^2 \phi(2^2 x - l)$$

这里

$$a_l^2 = \begin{cases} a_k^1 + b_k^1, & 若 l = 2k \\ a_k^1 - b_k^1, & 若 l = 2k+1 \end{cases}$$

注意，系数a_l^0和b_l^0决定了a_l^1，a_l^1和b_l^1决定了a_l^2……

前述的重构算法可总结为如下的定理。

定理 4.14（Haar 重构） 设

$$f = f_0 + w_0 + w_1 + w_2 + \cdots + w_{j-1}$$

这里，

$$f_0(x) = \sum_{k \in Z} a_k^0 \phi(x-k) \in V_0 \quad w_{j'}(x) = \sum_{k \in Z} b_k^{j'} \psi(2^{j'} x - k) \in W_{j'}$$

其中$0 \leqslant j' < j$。那么

$$f(x) = \sum_{l \in Z} a_l^j \phi(2^j x - l) \in V_j$$

这里的$a_l^{j'}$是根据如下算法，由$j' = 1$，$j' = 2$，…循环确定的，

$$a_l^{j'} = \begin{cases} a_k^{j'-1} + b_k^{j'-1}, & 若 l = 2k 是偶数 \\ a_k^{j'-1} - b_k^{j'-1}, & 若 l = 2k+1 是奇数 \end{cases}$$

例 4.15

用分解和重构算法压缩一个如图 4.19 所示的信号f，f定义于单位区间$[0,1]$上（与例 4.13 的信号相同）.

把$f(x)$离散化为2^8个样值点[所以$a_k^8 = f(k/2^8)$]，然后分解该信号（如定理 4.12 所示）得到$f = f_0 + w_0 + w_1 + w_2 + \cdots + w_7$，这里，

$$f_0(x) = a_0^0 \phi(x) \in V_0 \text{，而且 } w_{j'}(x) = \sum_{k \in Z} b_k^{j'} \psi(2^{j'} x - k) \in W_{j'}$$

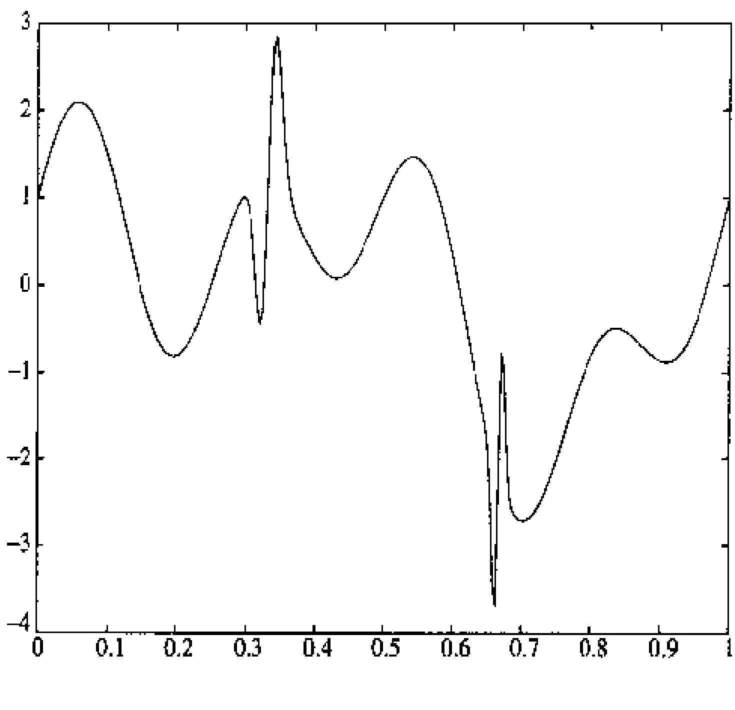


图 4.19　示例信号

这里$0 \leqslant j' \leqslant 7$。因为 $0 \leqslant x \leqslant 1$，所以$V_0$上的$\phi(x)$仅有一项。我们首先压缩 80%，意思是$|b_k^j|$按大小顺序排序后，把最小的 80%部分设为 0（保留最大的 20%不变）。然后按定理4.14重构信号，结果如图4.20所示。图4.21表示了压缩率为 90%时的结果。相对 L^2 误差为，80%压缩率时为 0.0895，90%压缩率时为 0.1838。

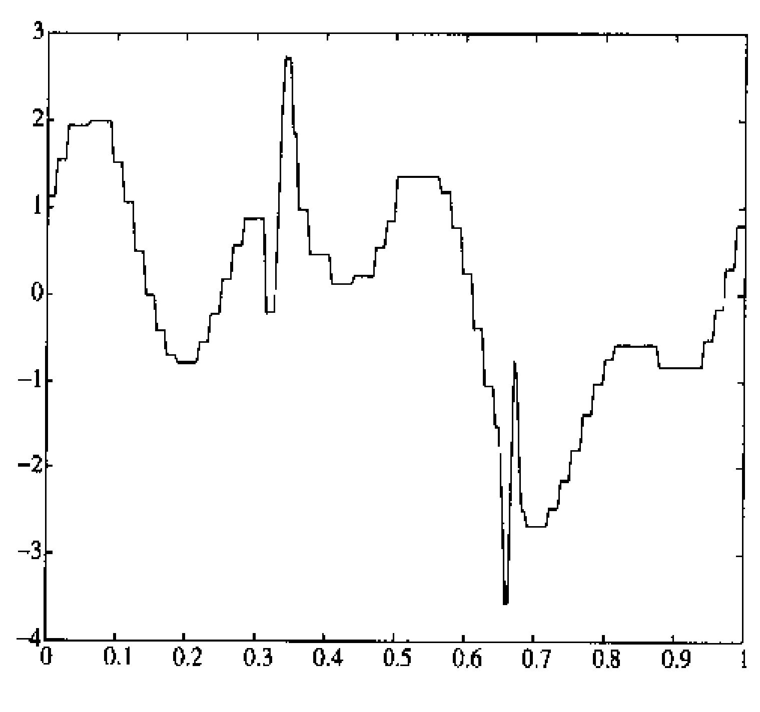


图 4.20　压缩率为 80%

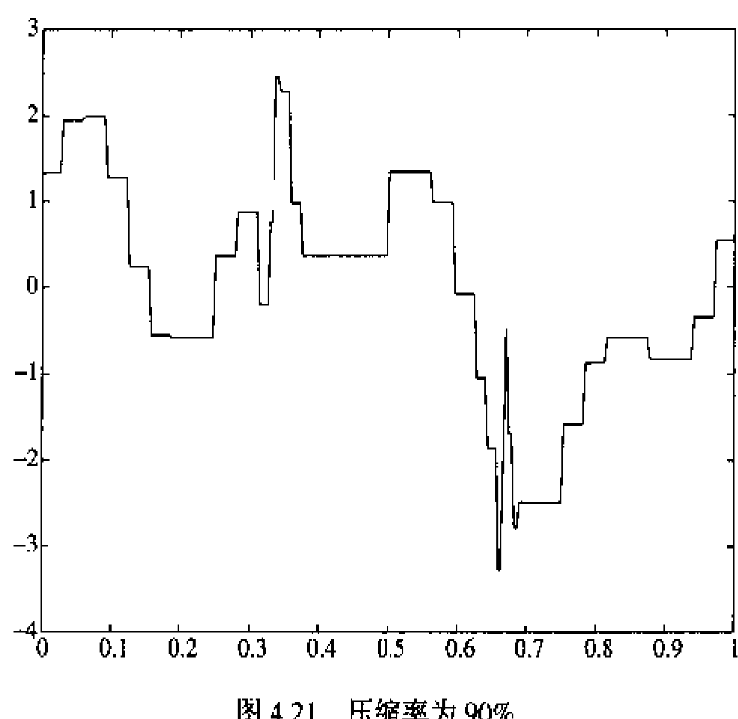


图 4.21 压缩率为 90%

4.3.3 滤波器和流程图

分解和重构算法可用离散滤波器和作用于系数序列的简单算子来表述。同时算法还可以方块图的方式形象地表示。

首先考虑分解算法。定义两个离散滤波器（卷积算子）H 和 L，其冲击响应分别为h和ℓ：

$$h=(\cdots 0\cdots\underbrace{-\frac{1}{2}\ \ \frac{1}{2}}_{k=-1,0}\cdots 0\cdots),\quad \ell=(\cdots 0\cdots\underbrace{\frac{1}{2}\ \ \frac{1}{2}}_{k=-1,0}\cdots 0\cdots)$$

若$\{x_k\}\in\ell^2$，那么$H(x):=h*x$，$L(x):=\ell*x$，结果是：

$$H(x)_k=(h*x)_k=\frac{1}{2}x_k-\frac{1}{2}x_{k+1},\quad L(x)_k=(\ell*x)_k=\frac{1}{2}x_k+\frac{1}{2}x_{k+1}$$

假如只保留偶数下标项，那么 $H(x)_{2k}=(h*x)_{2k}=\frac{1}{2}x_{2k}-\frac{1}{2}x_{2k+1}$，$L(x)_{2k}=(\ell*x)_{2k}=\frac{1}{2}x_{2k}+\frac{1}{2}x_{2k+1}$。这种丢弃奇数项系数的操作称为下取样（down sampling），用算子D表示。

应用以上表示方法，由j阶尺度系数a_k^j得到$j-1$阶尺度和小波系数。根据定理 4.12 并用a_k^j代替x，有：

$$b_k^{j-1}=DH(a^j)_k,\quad a_k^{j-1}=DL(a^j)_k$$

图 4.22 表示了该分解算法，图中的下取样算子D用更常用的符号“2↓”代替。

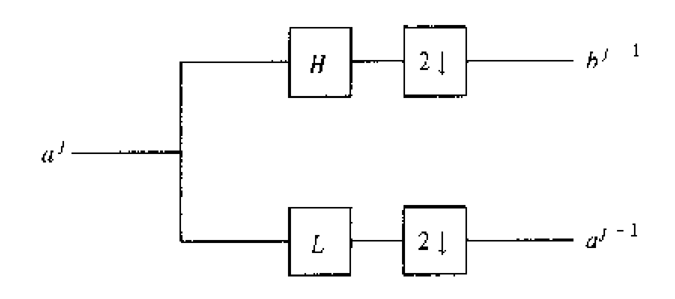


图 4.22　Haar 分解流程图

重构算法也需要定义两个离散滤波器 $\widetilde{H}$ 和 $\widetilde{L}$，相应的冲击响应为：

$$\widetilde{h} = (\cdots 0 \cdots \underbrace{1 \ \ -1}_{k=0,1} \cdots 0 \cdots), \quad \widetilde{\ell} = (\cdots 0 \cdots \underbrace{1 \ \ 1}_{k=0,1} \cdots 0 \cdots)$$

对于序列 $\{x_k\}$，有 $(\widetilde{h} * x)_k = x_k - x_{k-1}$ 和 $(\widetilde{\ell} * x)_k = x_k + x_{k-1}$　注意，下面这一点很重要：若 x、y 是两个奇部为 0 的序列，那么

$$(\widetilde{h} * x)_l = \begin{cases} x_{2k} & l = 2k \text{ 偶数} \\ -x_{2k} & l = 2k+1 \text{ 奇数} \end{cases}, \quad (\widetilde{\ell} * y)_l = \begin{cases} y_{2k} & l = 2k \text{ 偶数} \\ y_{2k} & l = 2k+1 \text{ 奇数} \end{cases}$$

把以上两式相加，得到：

$$(\widetilde{h} * x)_l + (\widetilde{\ell} * y)_l = \begin{cases} x_{2k} + y_{2k} & l = 2k \text{ 偶数} \\ y_{2k} - x_{2k} & l = 2k+1 \text{ 奇数} \end{cases}$$

这几乎就是定理 4.14 给出的重构方式。虽然假设 x_{2k+1} 和 y_{2k+1} 为 0，但 x_{2k} 和 y_{2k} 是我们选定的，所以令 $x_{2k} = b_k^{j-1}$，$y_{2k} = a_k^{j-1}$；于是有：

$$x = (\cdots \ 0 \ \ b_{-1}^{j-1} \ \ 0 \ \ \underbrace{b_0^{j-1}}_{k=0} \ \ 0 \ \ b_1^{j-1} \ \ 0 \ \ b_2^{j-1} \ \ 0 \cdots)$$

对 y 也有类似结果。序列 x 和 y 称为对序列 b^{j-1} 和 a^{j-1} 进行了上取样，用 U 表示上取样算子，所以 $x = Ub^{j-1}$，$y = Ua^{j-1}$。于是定理 4.14 中的重构公式可简洁地表示为：

$$a^j = \widetilde{L}Ua^{j-1} + \widetilde{H}Ub^{j-1}.$$

图 4.23 表示了该重构过程，上取样算子用符号 “2↑” 代替.

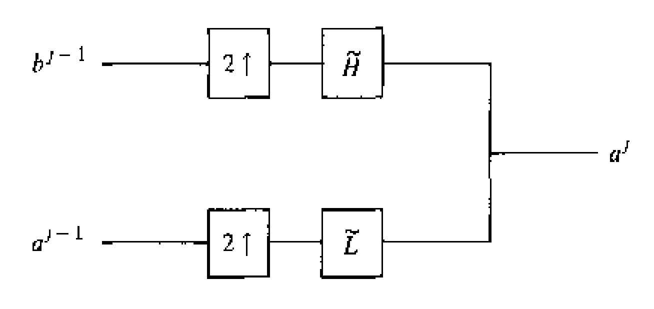


图 4.23 Haar 重构流程图

4.4 小结

本节对第 4 章讨论的主要内容做一小结。把处理(压缩或去噪)一个信号$y = f(t)$的过程分为 4 步，令ϕ和ψ分别为 Haar 尺度和 Haar 小波函数。

第 1 步：取样。若信号是连续的(模拟)，$y = f(t)$，t 表示时间，选择适当的$j = J$[①]，使得2^J大于信号的 Nyquist 抽样率(见定理 2.23 前的讨论)。令

$$a_k^J = f(k/2^J)$$

实际应用中，由原信号持续时间决定的k的范围是有限的。例如，若信号持续时间为$0 \leqslant t \leqslant 1$，那么$k$的范围是$0 \leqslant k \leqslant 2^J - 1$(或者$1 \leqslant l \leqslant 2^J$)。若信号已离散化，则本步就不需要了。令顶级的$a_k^J$等于取样信号的第$k$项，$2^J$等于取样速率。于是有$f$的顶级近似：

$$f_J(x) = \sum_{k \in Z} a_k^J \phi(2^J x - k)$$

第 2 步：分解。分解算法把f_J分解为：

$$f_J = w_{J-1} + \cdots + w_{j-1} + f_{j-1} + \cdots + w_0 + f_0$$

这里，

$$w_{j-1} = \sum_{l \in Z} b_l^{j-1} \psi(2^{j-1}x - l)$$

$$f_{j-1} = \sum_{l \in Z} a_l^{j-1} \phi(2^{j-1}x - l)$$

系数b_l^{j-1}和a_l^{j-1}由a^j经如下的算法迭代得到：

$$a_l^{j-1} = DL(a^j)_k \tag{4.18}$$

① 此处称为顶级的——译者注。

$$b_l^{j-1} = DH(a^j)_k \tag{4.19}$$

这里的H和L是如 4.3.3 节中所示的高通和低通滤波器。当$j = J$时，a_k^{J-1}和b_k^{J-1}是由在第 1 步中得到的取样信号a_k^J确定的。于是，当$j = J-1$时，则a_k^{J-2}和b_k^{J-2}由a_k^{J-1}确定。j可如此一直减少下去，直到到达了满足要求的级别或者没有系数可操作了。除非另外说明，本文讨论的分解算法均一直到达$j = 0$级

第 3 步：处理。信号分解后，有以下形式：

$$f_J(x) = \sum_{j=0}^{J-1} w_j - f_0 \tag{4.20}$$

$$= \sum_{j=0}^{J-1} \left(\sum_{k \in Z} b_l^j \psi(2^j x - k) \right) + \sum_{k \in Z} a_k^0 \phi(x - k) \tag{4.21}$$

通过修改小波系数b_k^j，可达到信号滤波目的。详细过程如何？需要具体问题具体对待。若要滤除所有高频信息，那么所有超过某个阈值的b_k^j应设为 0，结果可能是与某个k对应的信号区段的噪声被滤除了。若是为了压缩数据，那么低于某个阈值的b_k^j（当然是绝对值）将被赋0。不管何目的，处理过程就是修改b_k^j。

第 4 步：重构。现在的目标是获得修改后的信号f_J[按(4.21)式的形式，只不过b_k^j被修改过了]，即重构它为：

$$f_J = \sum_{k \in Z} a_k^J \phi(2^J x - k)$$

这由第 4.3.3 节中讨论的重构算法实现之：

$$a^j = \widetilde{L} U a^{j-1} + \widetilde{H} U b^{j-1} \tag{4.22}$$

这里$j - 1, \cdots, J$。当$j = 1$时，a_k^1由a_k^0和b_k^0得到。当$j = 2$时，a_k^2由a_k^1和b_k^1得到，如此这般，可一直进行下去。k的范围是由信号的持续时间决定的。当$j = J$时（顶级），a_k^J表示经过处理后的信号在$x = k/2^J$时的近似值。当然，由于在第3步中对系数作了修改，所以这里的a_k^J与原来的a_k^J是不同的。

4.5 习题

1. 令ϕ与ψ分别是Haar尺度函数和小波函数，V_j和W_j分别是由$\phi(2^j x - k)$, $k \in Z$和$\psi(2^j x - k)$，$k \in Z$张成的空间。考虑定义于$0 \leqslant x < 1$上的函数：

$$f(x)=\begin{cases}-1 & 0\leqslant x<1/4\\ 4 & 1/4\leqslant x<1/2\\ 2 & 1/2\leqslant x<3/4\\ -3 & 3/4\leqslant x<1\end{cases}$$

首先根据V_2中的基展开f，然后把f分解为W_1、W_0和V_0分量，即，要求f的 Haar 分解式，画出每个分量的图形。

2. 用下面的函数重做习题1：

$$f(x)=\begin{cases}2 & 0\leqslant x<1/4\\ -3 & 1/4\leqslant x<1/2\\ 1 & 1/2\leqslant x<3/4\\ 3 & 3/4\leqslant x<1\end{cases}$$

3. 若A和B是一内积空间V的有限维正交子空间，证明：

$$\dim(A\oplus B)=\dim A+\dim B$$

若A和B不必正交，那么$\dim(A+B)$、$\dim A$和$\dim B$之间的关系如何？

4. （a）令V_n是由$\phi(2^nx-k)$，$k\in Z$张成的空间，这里的ϕ是 Haar 尺度函数。在区间$0\leqslant x<1$上，空间V_n和W_n（$n\geqslant 0$）的维数是多少（仅计算基元素的个数）？

（b）应用习题3的结论，计算下式右边空间的维数：

$$V_n=W_{n-1}\oplus W_{n-2}\oplus\cdots\oplus W_0\oplus V_0$$

答案与在（a）中得到的V_n的维数一样吗？

5. 令ϕ与ψ分别是Haar尺度函数和小波函数，V_j和W_j分别是由$\phi(2^jx-k)$，$k\in Z$和$\psi(2^jx-k)$，$k\in Z$张成的空间。设$f(x)=\sum_k a_k\phi(2x-k)$ $(a_k\in R)$属于V_1，证明，若f与每个基元素$\phi(x-l)\in V_0$（l为整数）正交，则对任意整数l有$a_{2l+1}=-a_{2l}$，且有：

$$f(x)=\sum_{l\in Z}a_{2l}\psi(x-l)\in W_0$$

6. 根据下面给出的 Haar 小波分解结果，重构$g\in V_3$：

$$a^2=[1/2,2,5/2,-3/2]\quad b^2=[-3/2,-1,1/2,-1/2]$$

序列中的第一项对应$k=0$。画出g的图形。

7. 根据下面给出的 Haar 小波分解结果，重构$h\in V_3$：

$$a^1=[3/2,-1]\quad b^1=[-1,-3/2]\quad b^2=[-3/2,-3/2,-1/2,-1/2]$$

序列中的第一项对应 $k=0$。画出 h 的图形。

余下的习题需要用到 MATLAB、Maple 或 C 语言，附录 B 中的 MATLAB 程序可供参考。

8. （$[0,1]$上的 Haar 小波）令n为一整数，f是$[0,1]$上的连续函数，令 $h_k(t)=\sqrt{n}\phi(nt-k)$，这里的$\phi(t)$是 Haar 尺度函数，$\phi(t)$在$[0,1]$上为 1，其他为 0。$f$在由一系列$h_k$张成的空间上的投影为：

$$f_n=\langle f,h_0\rangle h_0+\cdots+\langle f,h_{n-1}\rangle h_{n-1}$$

证明f_n一致收敛到$[0,1]$上的f。若$f(t)=1-t^2$，用 MATLAB 或 Maple 语言求 $n=4,8$和16时的 Haar 小波分解（在$[0,1]$上的）。把结果画出来。

9. 令

$$f(t)=e^{-t^2/10}(\sin(2t)+2\cos(4t)+0.4\sin(t)\sin(50t))$$

如 4.4 节的第 1 步所示，把$0\leqslant t\leqslant 1$上的函数f离散化。$n=8$当做顶级（所以有2^8个取样点）。用 Haar 小波实现如 4.4 节第 2 步所示的分解算法。画出各个分量$f_{j-1}\in V_{j-1}$（$j=8,\cdots,1$）的图形，并同原信号做比较。

10. （习题9的继续）。在习题 9 中，若小波系数的绝对值小于阈值 $tol=0.1$，则把这些系数设为 0，从而达到滤波目的。然后如 4.4 节所示重构信号。画出重构信号f_8，并同原信号做比较。计算压缩后信号与原信号的相对误差。试验各种不同的阈值，记录下被滤除的小波系数所占的百分比，并画出相应曲线。

11. Haar 小波可用于检测信号中的间断点。令定义于$0\leqslant t<1$ 上的$g(t)$如下式所示：

$$g(t)=\begin{cases}0 & 0\leqslant t<7/17\\ 1-t^2 & 7/17\leqslant t<1\end{cases}$$

如 4.4 节的第1步所示，把$0\leqslant t\leqslant 1$上的函数g离散化。$n=7$作为顶级（所以有2^7个取样点），进行一级分解。画出第 6 级的小波系数幅度图，系数的最大值是多少？[①]相应于该位置的t是多少？把间断点取为8/9和2/7时，分别实验之。你为什么认为本方法行得通？

① 原文此处表达不清楚——译者注。

第 5 章　多分辨率分析

前章中我们描述了如何把一个信号分解为不同频率的 Haar 小波分量的过程（见定理 4.12）。Haar 小波方案依赖于两个函数：Haar 尺度函数 ϕ 和 Haar 小波函数 ψ，它们均易于描述且导致较容易的分解算法。Haar 分解算法的缺点是，两个函数均不连续（ϕ 在 $x=0$，1 处，ψ 在 $x=0$，1/2，1 处）。因此，Haar 分解算法仅为连续变化的函数提供了一个粗略的近似（例如在第 4 章所提到的，图4.3 显然并不是图4.2 的一个特别好的近似）。本章将描述一个与前章相类似的理论框架，但其构筑块 ϕ 和 ψ 是连续的。这就是 Stéphane Mallat[10，11]所提出的**多分辨率分析**理论。用连续的 ϕ 和 ψ 将比用 Haar 小波明显地提高分解算法的效果。

5.1　多分辨率框架

5.1.1　定义

在定义多分辨率分析以前，需要先准备一些预备知识。考虑定理 2.23 所示的取样理论，若某信号是带限的，且其 Nyquist 频率小于 $1/T$，那么可完全重构原信号，否则只能是近似的。T 越小，信号近似或分解得越好。T 的大小度量了信号 f 的分辨率，通常的 FFT 分析只有一个分辨 T。

若缓变信号中存在一个短时尖峰，那么单一分辨就显得不合适了——4.1 节中已简要地讨论了这一问题。对此问题 Mallat 这样是这样解决的：首先，把由取样定理得到的带限函数空间用原信号的某个截断代替。其次，用基于同一空间的不同尺度（即 $T/2$，$T/2^2,\cdots$）分析信号，所以称为多分辨分析。该框架不仅对分析信号是理想的，而且实际上还可构造小波。

下面先讨论多分辨率分析的一般定义。

定义 5.1　令 V_j，$j=\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots$ 为 $L^2(R)$ 中的一函数子空间序列。若下列条件成立，则空间集合 $\{V_j, j\in Z\}$ 称为依尺度函数 ϕ 的多分辨率分析：

1.（嵌套性）$V_j\subset V_{j+1}$
2.（稠密性）$\overline{\cup V_j}=L^2(R)$
3.（分立性）$\cap V_j=\{0\}$

4. （尺度性）$f(x)\in V_j$，当且仅当 $f(2^{-j}x)\in V_0$
5. （标准正交基）函数 $\phi\in V_0$，且 $\{\phi(x-k),k\in Z\}$ 是 V_0 的标准正交基（按照 L^2 内积）

V_j 称为近似空间 根据近似空间的不同，ϕ 有多种选择，从而对应不同的多分辨分析。虽然要求 $\phi(x)$ 的平移是标准正交的，但无须刻意去做 对于 ϕ，只要集合 $\{\phi(x-k),k\in Z\}$ 构成一个基，然后就可用 ϕ 得到一个新的尺度函数 $\tilde{\phi}$，使得 $\{\tilde{\phi}(x-k),k\in Z\}$ 是标准正交的 5.3 节将详细讨论之。

或许最有用的一类尺度函数是那些紧支撑的或有限支撑的。如前章的定义，若函数在某一有限区间外恒等于 0，则称该函数为有限支撑的（以下简称紧支的）。Haar 尺度函数就是紧支的。与 Daubechies 小波函数相关的尺度函数不仅是紧支的，而且是连续的 一个尺度函数同时拥有这两个性质当然是特别希望的，因为相应的分解和重构算法速度快，而且对分析和重构信号特别有利

例 5.2

Haar 尺度函数（见定义 4.1）产生的子空间 V_j，是由紧支的分段常量函数（即阶梯函数）构成的，其不连续点包含在 2^{-j} 的整数集（即 $\{2^{-j},j\in Z\}$，见定义 4.4）中。下面要验证集合 $\{V_j;\ j\geqslant 0\}$ 和 Haar 尺度函数满足多分辨率分析的定义。

如定义 4.4 后面所提及的，因为 2^{-j} 的整数集包含于 $2^{-(j+1)}$ 中，所以嵌套性自然得证。易见，被 V_j 中函数近似的信号能够捕获分辨率为 2^{-j} 下的信号细节 嵌套性指出，随 j 的增加，V_j 中的函数也越加逼近 f

Haar 系的稠密性即是定理 4.9 的内容。它指出，被 V_j 中函数近似的信号，当 j 趋于无穷时，可捕获信号的所有细节，如第 4 章的图 4.11 所示

下面讨论分立性。首先注意到在 V_j 的定义中，j 可正可负。若 $f\in V_{-j}$，$j>0$，那么 f 必定是 $\{\phi(x/2^j-k),k\in Z\}$ 的一个有限的线性组合，其各元素在 $\cdots,[-2^j,0),[0,2^j),\cdots$ 上是常量。随着 j 的增加，上述各小区间的范围相应增大 另一方面，f 的支撑区（使得 f 为非零的集合）必须保持有限 所以，当 $j\to\infty$ 时，若 f 属于所有的 V_{-j}，那么 f 只能为 0

最后，Haar 系的尺度性由定理 4.5 得出，标准正交条件由定理 4.6 得出。因此，Haar 系 $\{V_j\}$ 满足多分辨率分析的所有条件。

例 5.3

线性样条多分辨率分析。线性样条是连续的、逐段线性的函数，如图 5.1 中的折线所示。

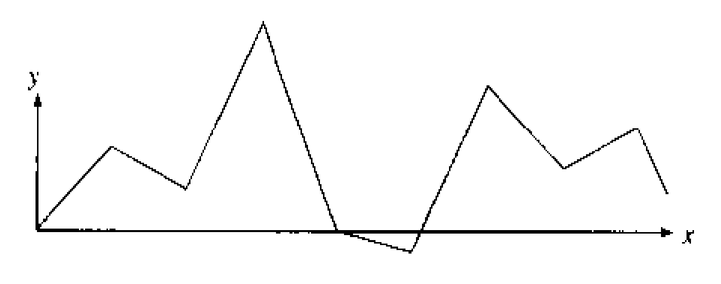


图 5.1 一个线性样条

可以构造一个基于线性样条的多分辨率分析。令V_j是所有能量有限信号f所组成的空间，f是连续且分段线性的，其拐点只可能在二进点$k/2^j$, $k\in Z$处。这些近似空间V_j满足多分辨率分析的定义 1~4（见习题 9）。尺度函数φ是“跳转函数”：

$$\varphi(x)=\begin{cases}x+1, & -1\leqslant x\leqslant 0\\ 1-x, & 0<x\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$$

显然集合$\{\varphi(x-k)\}_{k\in Z}$是非正交的。用 5.3 节的方法，可以构建一个新的尺度函数ϕ，以形成V_0中的标准正交基。

例 5.4

香农多分辨率分析 对$j\in Z$，令V_j是所有能量有限信号f所组成的空间，在区间$[-2^j\pi,2^j\pi]$以外，f的傅里叶变换$\widehat{f}=0$，即$f\in L^2(R)$是带限的，且有$\mathrm{supp}(\widehat{f})\subseteq[-2^j\pi,2^j\pi]$。尺度函数为$\phi(x)=\mathrm{sinc}(x)$，这里，

$$\mathrm{sinc}(x):=\begin{cases}1 & ,\ x=0\\ \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x} & ,\ x\neq 0\end{cases}\tag{5.1}$$

详见习题 8。

下面我们转向讨论对所有多分辨率分析都成立的性质。给定一函数g: $R\to R$，令

$$g_{jk}(x)=2^{j/2}g(2^jx-k)$$

函数$g_{jk}(x)=2^{j/2}g(2^j(x-k/2^j))$是原函数$g$的平移$(k/2^j)$和尺度化$(2^{j/2})$（见习题 1）。因子$2^{j/2}$在这里是为了保持$L^2$中的范数不变，即

$$\|g_{jk}\|^2_{L^2}=\|g\|^2_{L^2}\quad 对所有的\ j,k$$

尺度函数ϕ和稍后的小波函数均采用这种表示法。得到的第一个结论是，$\{\phi_{jk}\}_{k\in Z}$是V_j的一个标准正交基。

定理 5.5 设$\{V_j;j\in Z\}$是一个依尺度函数ϕ的多分辨率分析。那么对任一$j\in Z$，

函数集

$$\{\phi_{jk}(x) = 2^{j/2}\phi(2^j x - k);\ k \in Z\}$$

是V_j的一个标准正交基。

证明　为证明$\{\phi_{jk}, k \in Z\}$张成V_j，必须先证明对任一$f(x) \in V_j$可以写成$\{\phi(2^j x-k);\ k \in Z\}$的线性组合。应用尺度特性(定义 5.1 的条件 4)，函数$f(2^{-j}x) \in V_0$，因此$f(2^{-j}x)$是$\{\phi(x-k), k \in Z\}$的一个线性组合。以$2^j x$取代 x，即可发现$f(x)$是$\{\phi(2^j x - k), k \in Z\}$的一个线性组合。

为证明$\{\phi_{jk}, k \in Z\}$是标准正交的，只要证明

$$\langle \phi_{jk}, \phi_{jl} \rangle_{L^2} = \delta_{jk} = \begin{cases} 0 & 若 j \neq k \\ 1 & 若 j = k \end{cases}$$

$$或\ 2^j \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2^j x - k)\overline{\phi(2^j x - l)}\, dx = \delta_{kl}$$

为使上式成立，只要进行变量替换$y = 2^j x$（因此$dy = 2^j dx$）。于是有：

$$2^j \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2^j x - k)\overline{\phi(2^j x - l)}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y-k)\overline{\phi(y-l)}\, dy$$

根据定义 5.1 之条件 5 给出的标准正交基性质，上式等于δ_{kl}。

5.1.2 尺度关系

下面表述和证明多分辨率分析的中心公式——尺度关系式。

定理 5.6　设$\{V_j; j \in Z\}$是一个依尺度函数ϕ的多分辨率分析，那么下列尺度关系式成立：

$$\phi(x) = \sum_{k \in Z} p_k \phi(2x - k),\quad p_k = 2\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\overline{\phi(2x - k)}\, dx$$

而且还有

$$\phi(2^{j-1}x - l) = \sum_{k \in Z} p_{k-2l}\phi(2^j x - k) \tag{5.2}$$

或者，等价于

$$\phi_{j-1,l} = 2^{-1/2}\sum_k p_{k-2l}\phi_{jk} \tag{5.3}$$

这里$\phi_{jk}(x) = 2^{j/2}\phi(2^j x - k)$。

注释。上式表示了$\phi(x)$与$\phi(2x)$的平移关系，称为尺度关系或双尺度关系。因为当$|k|$足够大时，$\phi(2x-k)$的支撑将在$\phi(x)$的支撑之外，当$\phi(x)$的支撑是紧支撑时，则仅有有限个p_k非零。因此，定理 5.6 中的和式是有限的。通常ϕ是实的，此时p_k也是实的。

证明 为证明该定理，注意到，因为$\phi(x)\in V_0\subset V_1$，而$V_1$是由$\{\phi_{1k}, k\in Z\}$的线性组合张成的，则对某些$\tilde{p}_k$，$\phi(x)=\sum \tilde{p}_k\phi_{1k}(x)$ 必成立。因为$\{\phi_{1k}, k\in Z\}$是V_1的标准正交基，那么$\tilde{p}_k$可由定理 0.21 确定：

$$\tilde{p}_k=\langle\phi,\phi_{1k}\rangle_{L^2}=2^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x)\overline{\phi(2x-k)}\,dx$$

因此，

$$\phi(x)=\sum_{k\in Z}\tilde{p}_k\phi_{1k}(x)=\sum_{k\in Z}\tilde{p}_k 2^{1/2}\phi(2x-k)$$

令 $p_k=2^{1/2}\tilde{p}_k=2\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x)\,\overline{\phi(2x-k)}\,dx$，于是有：

$$\phi(x)=\sum_{k\in Z}p_k\phi(2x-k)$$

第一个关系式得证。为得到第二个关系式，只要在ϕ中用$2^{j-1}x-l$取代x，然后调整和式中的求和指标即可。第三个关系式是由第二个式子乘以$2^{(j-1)/2}$，然后适当简化后得到的

例 5.7

Haar 系中的p_k为

$$p_0=p_1=1$$

[见（4.12）式]其他的p_k等于 0。

例 5.8

正如前面所提到的，Haar 尺度函数和 Haar 小波函数是不连续的。由 Daubechies 提出的一个更复杂的构建方法将在第 6 章讨论，该方法可生成连续的尺度函数和小波函数（其图形见第 6 章的图 6.2、图 6.3）。在 6.1 节中计算出的相应的p_k值为：

$$p_0=\frac{1+\sqrt{3}}{4},\quad p_1=\frac{3+\sqrt{3}}{4},\quad p_2=\frac{3-\sqrt{3}}{4},\quad p_3=\frac{1-\sqrt{3}}{4} \tag{5.4}$$

以下是一些有关p_k的非常重要的等式。

定理 5.9　设 $\{V_j; j \in Z\}$ 是一个依尺度函数ϕ的多分辨率分析，那么下面的等式成立：

1. $\sum_{k \in Z} p_{k-2l}\overline{p_k} = 2\delta_{l0}$

2. $\sum_{k \in Z} |p_k|^2 = 2$

3. $\sum_{k \in Z} p_k = 2$

4. $\sum_{k \in Z} p_{2k} = 1$ 和 $\sum_{k \in Z} p_{2k+1} = 1$

证明　第 1 个等式可由双尺度关系（定理 5.6）以及$\{\phi(x-k), k \in Z\}$是标准正交的这一事实来证明。详见习题4a。只要在第 1 个等式中令 $l=0$，即可得到第 2 个等式。

第 3 个等式的证明要应用定理 5.6，即：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\,dx = \sum_{k \in Z} p_k \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2x-k)\,dx$$

令$t = 2x - k$以及 $dx = dt/2$，有：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\,dx = 1/2 \sum_{k \in Z} p_k \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\,dt$$

因为$\int \phi(t)\,dt$不能等于 0（见习题 6），否则的话，我们就不能用V_j中的函数近似$f \in L^2(R)$，这里$\int f(t)\,dt \neq 0$。因此，等式两边的$\int \phi(t)\,dt$可消掉，从而第3 个等式得证。

下面证明第 4 个等式。把第 1 个等式中的l用$-l$代替，然后对l求和，得到：

$$\sum_{l \in Z}\sum_{k \in Z} p_{k+2l}\overline{p}_k = 2\sum_{l \in Z} \delta_{l0} = 2$$

把对k的和式分为奇部和偶部：

$$\begin{aligned} 2 &= \sum_{l \in Z}\left(\sum_{k \in Z} p_{2k+2l}\,\overline{p}_{2k} + \sum_{k \in Z} p_{2k+1+2l}\,\overline{p}_{2k+1}\right) \\ &= \sum_{k \in Z}\left(\sum_{l \in Z} p_{2k+2l}\right)\overline{p}_{2k} + \sum_{k \in Z}\left(\sum_{l \in Z} p_{2k+1+2l}\right)\overline{p}_{2k+1} \end{aligned}$$

在右边两个对l求和的式子中，用$l-k$取代l，从而使这两个和式变为$\sum_l p_{2l}$和$\sum_l p_{2l+1}$。因此，

$$2=\sum_{k\in Z}\overline{p}_{2k}\sum_{l\in Z}p_{2l}+\sum_{k\in Z}\overline{p}_{2k+1}\sum_{l\in Z}p_{2l+1}$$

$$=|\sum_{k\in Z}\overline{p}_{2k}|^2+|\sum_{k\in Z}\overline{p}_{2k+1}|^2$$

令$E=\sum_{k\in Z}p_{2k}$，$O=\sum_{k\in Z}p_{2k+1}$，那么上式可写为$|E|^2+|O|^2=2$。由第 3 个等式$\sum_k p_k=2$，把这个和式分成偶数指标部分和奇数指标部分，从而有$E+O=2$。联立以上两个关于 E 和 O 的方程，得到惟一解$E=O=1$，如图 5.2 所示（仅当p_k为实数时）。当p_k为更一般情况时，见习题 7。

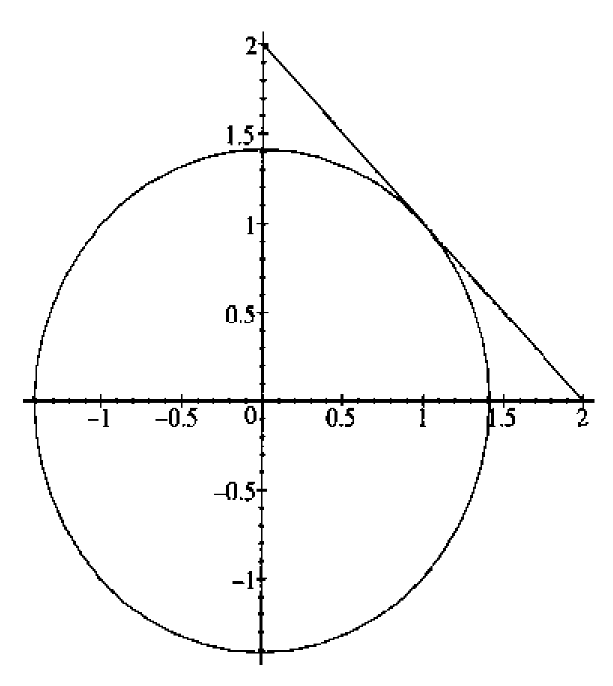


图 5.2 圆$E^2+O^2=2$和直线$E+O=2$

5.1.3 相应的小波和小波空间

前面已讲过，V_j是V_{j+1}的子空间。为了使分解算法能够通用，需要把V_{j+1}表示为V_j及其正交补W_j的直和（如同Haar系时的情形）。除此之外，还需要构建一个函数ψ，其平移系产生空间W_j（仍然如同 Haar 系时的情形）。一旦ϕ确定下来，利用尺度关系即可构建产生W_j的函数ψ。

定理 5.10 设$\{V_j;j\in Z\}$是一个多分辨率分析，相应的尺度函数为：

$$\phi(x)=\sum_k p_k\phi(2x-k)$$

（p_k是定理 5.6 中的系数）。令W_j是由$\{\psi(2^jx-k);\ k\in Z\}$张成的，这里

$$\psi(x)=\sum_{k\in Z}(-1)^k\overline{p_{1-k}}\phi(2x-k) \qquad (5.5)$$

那么$W_j\subset V_{j+1}$是V_{j+1}中V_j的正交补。而且，$\{\psi_{jk}(x):=2^{j/2}\psi(2^jx-k),k\in Z\}$是$W_j$的一个标准正交基。

对于 Haar 尺度函数，$p_0=p_1=1$，定理 5.10 也指出了$\psi(x)=\phi(2x)-\phi(2x-1)$，这与定义 4.7 中$\psi$的定义是一致的。

定理 5.10 的证明　只要证明在$j=0$时定理成立，那么应用尺度条件（定义 5.1 之条件 4），$j>0$时的证明马上可得到。

当$j=0$时，等效地要证明以下 3 条命题：

1. 集合$\{\psi_{0k}(x)=\psi(x-k),\ k\in Z\}$是标准正交的。
2. $\psi_{0k}(x)=\psi(x-m)$，$m\in Z$与V_0正交。即W_0包含于V_0的正交补中。
3. V_1中与V_0正交的函数可写为$\psi(x-k)$的线性组合。即W_0包含V_0的正交补。

此处仅证明前两个命题，而把第 3 个的证明放在附录 A 中（因为技巧性较强）。把第 2 条和第 3 条命题合起来就得到，W_0是V_1中V_0的正交补。

下面证明第 1 条命题。由习题 4b 可知：

$$\langle\psi_{0m},\psi_{0l}\rangle=\frac{1}{2}\sum_{k\in Z}\overline{p_{1-k+2m}}\,p_{1-k+2l}$$

令$k'=1-k+2m$，并应用定理 5.9 的第 1 部分，有：

$$\langle\psi_{0m},\psi_{0l}\rangle=\frac{1}{2}\sum_{k'\in Z}\overline{p_{k'}}\,p_{k'+2l-2m}=\delta_{m-l,0}=\delta_{m,l}$$

所以$\psi_{0,m}$是标准正交的。

下面证明第 2 条命题。因为V_0是由$\{\phi(x-l),\ l\in Z\}$张成的，所以只要证明$\psi(x-m)$与$\phi(x-l)$正交，这里$l\in Z$。由习题4c可知：

$$\langle\phi_{0l},\psi_{0m}\rangle=\frac{1}{2}\sum_{k\in Z}(-1)^k p_{1-k+2m}\ p_{k-2l}$$

右边的和式为 0。为证明此，首先令$l=m=0$，则该和式为：

$$\sum_{k\in Z}(-1)^k p_{1-k}p_k=\cdots-p_2p_{-1}+p_1p_0-p_0p_1+p_{-1}p_2+\cdots$$

见，以中心项为中点，两侧的项两两相互抵消。一般情况时，注意到$k=l+m-j$，$j\geqslant 0$的项是：

$$(-1)^{l+m-j}p_{1-l+m+j}p_{m-l-j}$$

与$k = l + m + j + 1$的项（当然$j \geqslant 0$）相互抵消，即：

$$(-1)^{l+m+j+1} p_{m-l-j} p_{m+j+1-l} = -(-1)^{l+m-j} p_{m-l-j} p_{m+j+1-l}$$

至此完成了对第 2 条命题的证明．正如一开始所述，第 3 条命题将在附录 A 中证明

为今后应用方便，注意到$\psi_{jl}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - l)$有以下的展开式：

$$\psi_{jl} = 2^{-1/2} \sum_{k \in Z} (-1)^k \overline{p_{1-k+2l}} \phi_{j+1,k} \tag{5.6}$$

这可由定理 5.10 中对ψ的定义得到：用$2^j x - l$替换x，然后两边乘以$2^{j/2}$，并调整求和指标。

由定理 5.10 可知，$\{\psi_{j-1,k}\}_{k \in Z}$是空间$W_{j-1}$的标准正交基，而$W_{j-1}$是$V_j$中$V_{j-1}$的正交补（即$V_j = W_{j-1} \oplus V_{j-1}$），把这样的正交分解依次进行下去，得到：

$$\begin{aligned} V_j &= W_{j-1} \oplus V_{j-1} \\ &= W_{j-1} \oplus W_{j-2} \oplus V_{j-2} \\ &\cdots \\ &= W_{j-1} \oplus W_{j-2} \oplus \cdots \oplus W_0 \oplus V_0 \end{aligned}$$

因为已经定义了$j < 0$时的V_j，所以还可以继续分解下去：

$$\begin{aligned} V_j &= W_{j-1} \oplus W_{j-2} \oplus \cdots \oplus W_0 \oplus W_{-1} \oplus V_{-1} \\ &\cdots \\ &= W_{j-1} \oplus W_{j-2} \oplus \cdots \oplus W_{-1} \oplus W_{-2} \cdots \end{aligned}$$

因为V_j是嵌套的，而且所有V_j的并集并是空间$L^2(R)$。因此，令$j \to \infty$时，就有下面的定理。

定理 5.11 令$\{V_j, j \in Z\}$是一个依尺度函数ϕ的多分辨率分析，令W_j是V_{j+1}中V_j的正交补，则有：

$$L^2(R) = \cdots \oplus W_{-1} \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus \cdots$$

特别地，对任一$f \in L^2(R)$，可惟一地表示为一个和式$\sum_{k=-\infty}^{\infty} w_k$，这里$w_k \in W_k$，而且$w_k$相互正交．即小波函数集$\{\psi_{jk}\}_{j,k \in Z}$是$L^2(R)$的一个标准正交基。

定理中的无限和应视为有限和的近似。即，只要j足够大，有限和式$w_{-j} + w_{1-j} + \cdots + w_{j-1} + w_j$可以依$L^2$范数以任意精度逼近任一$f \in L^2(R)$。

当j较大时，因为W_j是经代表高频的函数$\psi(2^j x)$的平移得到的，因此信号的W_j分量表示了信号的高频部分。例如，请比较图 5.3 和图 5.4 中的图形，它们分别表示函数$\psi(x)$和$\psi(2^2 x)$。

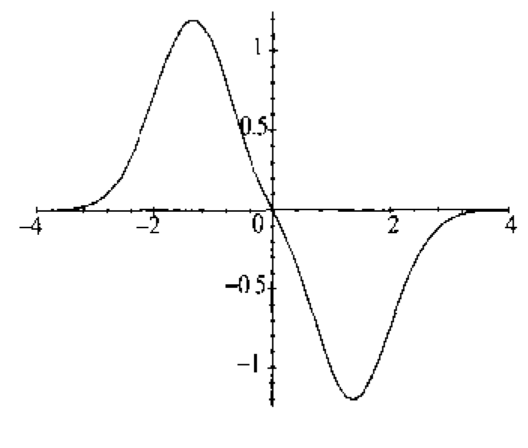


图 5.3　$\psi(x)$

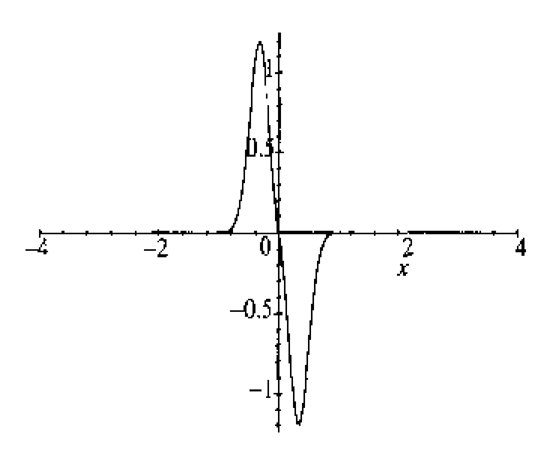


图 5.4　$\psi(2^2x)$

5.1.4　分解和重构公式

设待处理信号为f，在空间V_j中有其逼近。有两个最基本的标准正交基可用于表示f. 第一个是V_j上的尺度函数基$\{\phi_{jk}\}_{k\in Z}$，在定理 5.5 已给出了其定义。根据该基，我们有：

$$f=\sum_{k\in Z}\langle f,\phi_{jk}\rangle\phi_{jk} \tag{5.7}$$

当然，因为已有正交直和分解$V_j=V_{j-1}\oplus W_{j-1}$，所以可以把$V_{j-1}$和$W_{j-1}$的基级联起来，于是有$\{\phi_{j-1,k}\}_{k\in Z}\cup\{\psi_{j-1,k}\}_{k\in Z}$，这里的$\psi_{jk}$见定理 5.10 中的定义. 根据这个级联的标准正交基（见定理 0.21），f可表示为：

$$f=\underbrace{\sum_{k\in Z}\langle f,\phi_{j-1,k}\rangle\phi_{j-1,k}}_{f_{j-1}}+\underbrace{\sum_{k\in Z}\langle f,\psi_{j-1,k}\rangle\psi_{j-1,k}}_{w_{j-1}} \tag{5.8}$$

分解公式由相应于第 1 个基[见（5.7）式]的系数开始，然后计算第 2 个基的系数[见

(5.8)式]。重构公式为分解公式的逆。以下是分解公式：

$$\text{分解：}\begin{cases}\langle f,\phi_{j-1,l}\rangle = 2^{-1/2}\sum_{k\in Z}\overline{p_{k-2l}}\langle f,\phi_{jk}\rangle \\ \langle f,\psi_{j-1,l}\rangle = 2^{-1/2}\sum_{k\in Z}(-1)^k p_{1-k+2l}\langle f,\phi_{jk}\rangle\end{cases} \qquad (5.9)$$

上面的两个等式是由 Parseval 恒等式(见习题 3)和相应的展开式得到的。应用(5.7)式的 f 的展开式和(5.3)式的尺度关系，就得到第 1 式。第 2 式的证明也用到(5.7)式，但还要用到(5.6)式，对其中的小波函数 ψ_{jk}，用 $j-1$ 取代 j 即可。

分解公式的一个重要应用是根据第 2 个基[①]来表示 ϕ_{jk}。由分解公式(5.9)式和 ϕ_{jk} 的标准正交性，有 $\langle\phi_{jk},\phi_{j-1,l}\rangle = 2^{-1/2}\overline{p_{k-2l}}$ 和 $\langle\phi_{jk},\psi_{j-1,l}\rangle = 2^{-1/2}(-1)^k p_{1-k+2l}$。把取和下标 l 经过适当的变换，有下面的展开式：

$$\phi_{jk} = \sum_{l\in Z}2^{-1/2}\overline{p_{k-2l}}\phi_{j-1,l} + \sum_{l\in Z}2^{-1/2}(-1)^k p_{1-k+2l}\psi_{j-1,l} \qquad (5.10)$$

文献上一般称为尺度关系的逆。

把 Parseval 恒等式(见习题 3)应用于(5.10)式和(5.8)式，得到重构公式：

$$\text{重构：}\begin{cases}\langle f,\phi_{jk}\rangle = 2^{-1/2}\sum_{l\in Z}p_{k-2l}\langle f,\phi_{j-1,l}\rangle \\ \qquad\qquad + 2^{-1/2}\sum_{l\in Z}(-1)^k\overline{p_{1-k+2l}}\langle f,\psi_{j-1,l}\rangle\end{cases} \qquad (5.11)$$

前面的分解和重构公式中均包含标准正交基。有时使用正交基的另外一种形式 $\{\phi(2^jx-k)\}_{k\in Z}$ 而不是 $\{\phi_{jk}(x) = 2^{j/2}\phi(2^jx-k)\}_{k\in Z}$ 可能会更方便一些。同样地，使用 $\{\psi(2^jx-k)\}_{k\in Z}$ 而不是 $\{\psi_{jk}(x) = 2^{j/2}\psi(2^jx-k)\}_{k\in Z}$。例如，(5.7)式中 $f\in V_j$ 的展开式可重新写为：

$$f(x) = \sum_{k\in Z}\underbrace{2^{j/2}\langle f,\phi_{jk}\rangle}_{a_k^j}\ \underbrace{2^{-j/2}\phi_{jk}}_{\phi(2^jx-k)}$$

$$= \sum_{k\in Z}a_k^j\phi(2^jx-k)$$

类似地，(5.8)式可重新写为：

$$f = \sum_{k\in Z}a_k^{j-1}\phi(2^{j-1}x-k) + \sum_{k\in Z}b_k^{j-1}\psi(2^{j-1}x-k)$$

---

① 即下一级的——译者注。

这里 $a_k^{j-1}=2^{(j-1)/2}\langle f,\phi_{j-1,k}\rangle$，$b_k^{j-1}=2^{(j-1)/2}\langle f,\psi_{j-1,k}\rangle$，$a_k^j$ 称为粗略系数，b_k^j 称为精细系数。根据这两个系数，分解和重构公式可重新写为：

$$\text{分解：}\begin{cases}a_l^{j-1}=2^{-1}\sum_{k\in Z}\overline{p_{k-2l}}a_k^j\\ b_l^{j-1}=2^{-1}\sum_{k\in Z}(-1)^k p_{1-k+2l}\,a_k^j\end{cases}\tag{5.12}$$

$$\text{重构：}\ a_k^j=\sum_{l\in Z}p_{k-2l}a_l^{j-1}+\sum_{l\in Z}(-1)^k\,\overline{p_{1-k+2l}}\,b_l^{j-1}\tag{5.13}$$

以上论述可形像地概括为：用基 $\{\phi_{jk}\}_{k\in Z}$ 观察信号的整体，用基 $\{\phi_{j-1,k}\}_{k\in Z}\cup\{\psi_{j-1,k}\}_{k\in Z}$ 观察信号的平滑和振荡部分。

5.1.5　小结

下面总结依尺度函数 ϕ 的多分辨率分析 $\{V_j\}_{j\in Z}$ 的主要结论。

尺度函数

$$V_j\text{的基：}\{\phi_{jk}=2^{j/2}\phi(2^jx-k)\}_{k\in Z}$$

$$\text{尺度关系：}\begin{cases}\phi(x)=\sum_{k\in Z}p_k\phi(2x-k)\\ \phi(2^{j-1}x-l)=\sum_{k\in Z}p_{k-2l}\phi(2^jx-k)\\ \phi_{j-1,l}=2^{-1/2}\sum_{k\in Z}p_{k-2l}\phi_{jk}\end{cases}$$

小波空间

$$W_j\perp V_j,\quad V_{j+1}=V_j\oplus W_j$$
$$V_{j+1}=\cdots W_{j-2}\oplus W_{j-1}\oplus W_j$$
$$L^2(R)=\cdots W_{j-2}\oplus W_{j-1}\oplus W_j\oplus W_{j+1}\cdots$$

小波

$$\begin{cases}\psi(x)=\sum_{k\in Z}(-1)^k\overline{p_{1-k}}\phi(2x-k)\\ \psi(2^{j-1}x-l)=\sum_{k\in Z}(-1)^k\overline{p_{1-k+2l}}\phi(2^jx-k)\\ \psi_{jl}=2^{-1/2}\sum_{k\in Z}(-1)^k\overline{p_{1-k+2l}}\phi_{j+1,k}\end{cases}$$

标准正交基

W_j	V_j	$L^2(R)$
$\{\psi_{j-1,k}\}_{k\in Z}$	$\{\phi_{j-1,k}\}_{k\in Z}\cup\{\psi_{j-1,k}\}_{k\in Z}$	$\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in Z}$
	$\{\phi_{jk}\}_{k\in Z}$	

分解公式

$$\text{标准正交形式}\begin{cases}\langle f,\phi_{j-1,l}\rangle=2^{-1/2}\sum_{k\in Z}\overline{p_{k-2l}}\langle f,\phi_{jk}\rangle\\ \langle f,\psi_{j-1,l}\rangle=2^{-1/2}\sum_{k\in Z}(-1)^k p_{1-k+2l}\langle f,\phi_{jk}\rangle\end{cases}$$

$$\text{正交形式}\begin{cases}a_l^{j-1}=2^{-1}\sum_{k\in Z}\overline{p_{k-2l}}a_k^j\\ b_l^{j-1}=2^{-1}\sum_{k\in Z}(-1)^k p_{1-k+2l}a_k^j\end{cases}$$

这里，

$$f=\sum_{k\in Z}a_k^j\phi(2^jx-k)=\sum_{k\in Z}a_k^{j-1}\phi(2^{j-1}x-k)+b_k^{j-1}\psi(2^{j-1}x-k)$$

重构公式

$$\text{归一化形式}\begin{cases}\langle f,\phi_{jk}\rangle=2^{-1/2}\sum_{l\in Z}p_{k-2l}\langle f,\phi_{j-1,l}\rangle\\ \qquad\qquad+2^{-1/2}\sum_{l\in Z}(-1)^k\overline{p_{1-k+2l}}\langle f,\psi_{j-1,l}\rangle\end{cases}$$

$$\text{正交形式}\ a_k^j=\sum_{l\in Z}p_{k-2l}a_l^{j-1}+\sum_{l\in Z}(-1)^k\overline{p_{1-k+2l}}b_l^{j-1}$$

5.2 分解和重构的实现

本节描述与多分辨率分析相应的分解和重构算法。本节的算法与 Haar 小波部分的那些算法相似。后面几节中，将详细讨论信号的精确分解和重构算法，依靠的就是多分辨率分析框架下的连续尺度函数和连续小波函数。

5.2.1 分解算法

为了进行信号处理，诸如滤波和数据压缩等，需要一个有效的算法来把信号分解成若干个不同的频率分量。若把多分辨率分析的概念用于此日的，就需要一个能够把信号分解为小波空间 (W_j) 中各分量的算法，因为这些分量中有我们想要的信息。

分解信号 f 分三个主要步骤：初始化、迭代和终止。

初始化 该步包含两部分。首先要决定近似空间 V_j，使其能最佳地反映 f 的各种信息。取样率和进行什么样的多分辨率分析确定了 V_j。其次，需要选择一个 $f_j\in V_j$，以便能最佳地逼近 f。

V_j 中对 f 的最佳逼近，根据能量观点，是 f 在 V_j 上的正交投影 P_jf（见定义 0.19）。因为 $2^{j/2}\phi(2^jx-k)$ 是标准正交的，那么定理 0.21 意味着：

$$P_jf(x)=\sum_{k\in Z}a_k^j\phi(2^jx-k)\text{，这里 }a_k^j=2^j\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\overline{\phi(2^jx-k)}\,dx \qquad (5.14)$$

信号取样后包含的信息，通常不足以准确地确定系数 a_k^j，所以要用如下面定理所示的正交化规则来近似它们。

定理 5.12　令 $\{V_j, j \in Z\}$ 是一个依紧支撑的尺度函数 ϕ 的多分辨率分析。若 $f \in L^2(R)$是连续的，那么对足够大的 j，有：

$$a_k^j = 2^j \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{\phi(2^j x - k)}\, dx \approx m f(k/2^j)$$

这里 $m = \int \overline{\phi(x)}\, dx$。

证明　因为 ϕ 是紧支撑的，所以 ϕ 的非零集被限定在一闭包 $\{|t| \leqslant M\}$中（多数情况下，M 不是太大。实际上，对 Haar 函数，M 等于 1；对比较简单的 Daubechies 小波，M 约等于 5）。因此，(5.14) 中 a_k^j 的积分区间是$\{x;\ |2^j x - k| \leqslant M\}$。进行变量替换 $t = 2^j x - k$，有：

$$a_k^j = \int_{-M}^{M} f(2^{-j}t + 2^{-j}k)\overline{\phi(t)}\, dt$$

当 j 很大时，有 $2^{-j}t + 2^{-j}k \approx 2^{-j}k$，$t \in [-M, M]$。因为$f$在任一有限区间上是一致连续的，所以 $f(2^{-j}t + 2^{-j}k) \approx f(2^{-j}k)$，$t \in [-M, M]$。如图 5.5 所示。

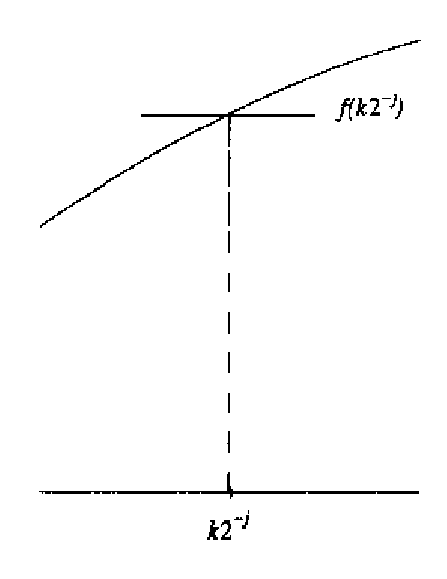


图 5.5　连续函数在很小的区间里几乎是常量

因此，可用 $f(2^{-j}k)$代替 $f(2^{-j}t + 2^{-j}k)$，于是有：

$$a_k^j \approx f(k/2^j) \int_{-M}^{M} \overline{\phi(t)}\, dt$$

因为 ϕ 在$[-M, M]$以外为 0，所以有：

$$\int_{-M}^{M} \overline{\phi(t)}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\phi(t)}\, dt = m$$

因此，$a_k^j \approx mf(k/2^j)$，证毕。

这个近似的精度随 j 的增加而提高。在习题 12 中，根据给定的误差容限，可以估计出需要多大的 j 。精度取决于指标 j 和 k 以及 f 的平滑程度。因为在实际应用中，仅仅能处理有限个系数，所以为了精确地计算这些系数，j 的大小要选择得合适。此外，该定理的证明过程经适当修改后，可应用于分段连续信号（见习题 15）情况时的证明，也可应用于 ϕ 具有良好局部化但不是紧支撑的情况时的证明。如定理 5.9 的证明中所提到的，$\int \phi \neq 0$（见习题 6）。常常这样构造 ϕ，使 $\int \phi = 1$（例如 Haar 小波和 Daubechies 小波），此时 $a_k^j = f(k/2^j)$。应用正交化公式 $a_k^j \doteq mf(k/2^j)$，可以用下式近似投影 $P_j f$：

$$P_j f(x) \approx f_j(x) = m \sum_{k \in Z} f(k/2^j)\phi(2^j x - k)$$

可见，与取样定理公式有一定相似性。

在这里讨论的初始化步骤，在许多文献中常常不加说明地被简单地假设和应用。Strang and Nguyen [20] 指出了以上这些问题，并称之为“小波罪恶！”（wavelet crime）。

迭代 小波的闪光点正在于此！初始化后，有 $f \approx f_j \in V_j$。根据定理 5.11，可由 f_j 开始，逐级分解为较低级别的近似部分 $f_{j-1} \in V_{j-1}$ 和小波部分 $w_{j-1} \in W_{j-1}$，即 $f_j = f_{j-1} + w_{j-1}$。如此，对 f_{j-1} 和 f_{j-2} 采用相同步骤，并一直进行下去，如下图所示，最后终止于第 0 级分解上。

$$\begin{array}{ccccccccccc} f \approx f_j & \longrightarrow & f_{j-1} & \longrightarrow & f_{j-2} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & f_1 & \longrightarrow & f_0 \\ & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\ & & w_{j-1} & & w_{j-2} & & \cdots & & w_1 & & w_0 \end{array}$$

为进行分解，需要对近似系数和小波系数，即 5.1.4 节末讨论的 a 和 b 系数进行操作。如同 Haar 小波时的情形，我们想得到分解公式（5.12）的离散滤波器实现形式，及其算子表示。

因为两个序列 $x = (\cdots x_{-1}, x_0, x_1, \cdots)$ 和 $y = (\cdots y_{-1}, y_0, y_1, \cdots)$ 的卷积定义为（见定义 3.9）：

$$(x * y)_l = \sum_{k \in Z} x_k y_{l-k}$$

令 h 和 ℓ 序列为：

$$h_k := \frac{1}{2}(-1)^k p_{k+1} \tag{5.15}$$

$$\ell_k := \frac{1}{2}\overline{p_{-k}} \tag{5.16}$$

通过$H(x) = h*x$ 和 $L(x) = \ell * x$，定义两个离散滤波器（卷积算子）H和L。记$x = a^j$，注意到$L(a^j)_l = \frac{1}{2}\sum_{k\in Z}\overline{p_{k-l}}a_k^j$。比较上式与（5.12）式，得到$a_l^{j-1} = L(a^j)_{2l}$。类似地有，$b_l^{j-1} = H(a^j)_{2l}$。在讨论 Haar 分解算法时，遇到过舍弃序列中奇数项部分的操作，称之为“下取样”。下取样信号是对原信号每隔一个点取一个样本后得到的。定义下取样算子D如下。

定义 5.13　若$x = (\cdots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \cdots)$，那么其下取样是序列

$$Dx = (\cdots, x_{-2}, x_0, x_2, \cdots)$$

或$(Dx)_l = x_{2l}$，$l \in Z$。

可以用离散滤波器（卷积算子）来描述迭代步骤。这里所用的两个滤波器h和ℓ，分别称为分解高通和分解低通滤波器。

$$\left.\begin{aligned}&\text{卷积形式：}\ a^{j-1} = D(\ell * a^j),\ b^{j-1} = D(h * a^j)\\&\text{算子形式：}\ a^{j-1} = DLa^j,\ b^{j-1} = DHa^j\end{aligned}\right\} \tag{5.17}$$

图 5.6 表示了分解算法的迭代过程，用$2\downarrow$形像地表示了下取样算子。

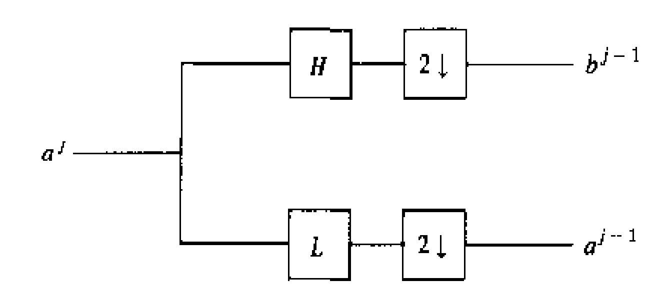


图 5.6　基于多分辨率分析的分解算法

特别值得注意的是，离散滤波器和下取样算子不依赖于j，所以存储需求量小，而且由于卷积运算并不耗时，整个迭代过程既快又有效。

终止。终止分解运算的准则有好几个。最简单的就是一直分解下去直至耗尽所有的样本点。但这可能并不必要。奇异性检测可能只需要分解1至2级。一般地，终止点的选择主要取决于我们想完成的工作。

整个分解过程终止后（终止于$j = 0$），生成了一个系数集，它包含 0 级近似系数（即$\{a_k^0\}$）和细节（小波）系数$\{b_k^{j'}\}$，$j' = 0, \cdots, j-1$。

例 5.14

考虑定义于单位区间$0 \leqslant x \leqslant 1$上的信号$f$，如图 5.7 所示（同例 4.13 中用的信号一样）。如前所述，把该信号离散化为2^8个样值点［于是$a_l^8 = f(l/2^8)$］。在（5.17）式给出的分解算法中，应用 Daubechies 小波，其p值在（5.4）式中给出。分量V_8、V_7、V_6和V_4如图 5.8 至图 5.11 所示。比较这些图形与应用 Haar 小波时相应的图形（第4章的图4.14、图4.16、图4.17 和图4.18）。可见，因为 Daubechies 小波是连续的，它们比应用 Haar 小波时对原信号有更好的近似。

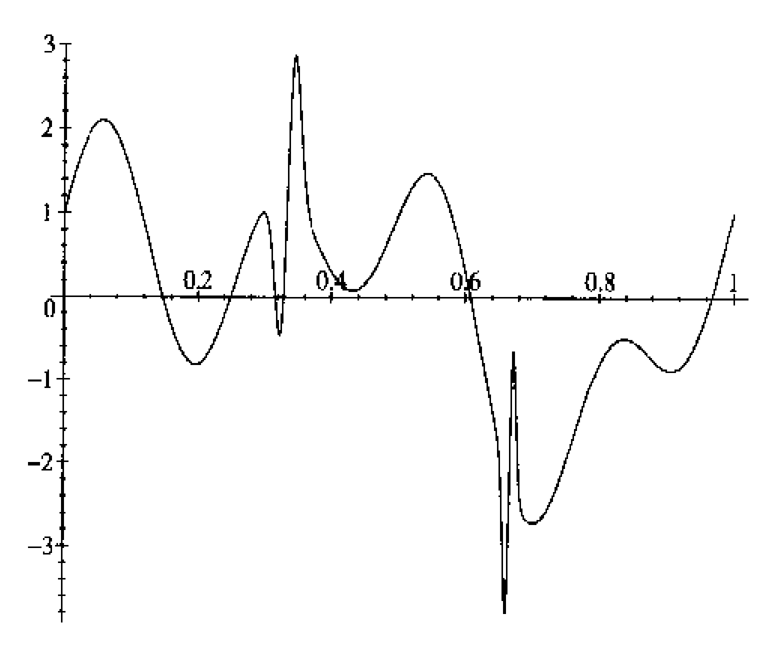


图 5.7 示例信号

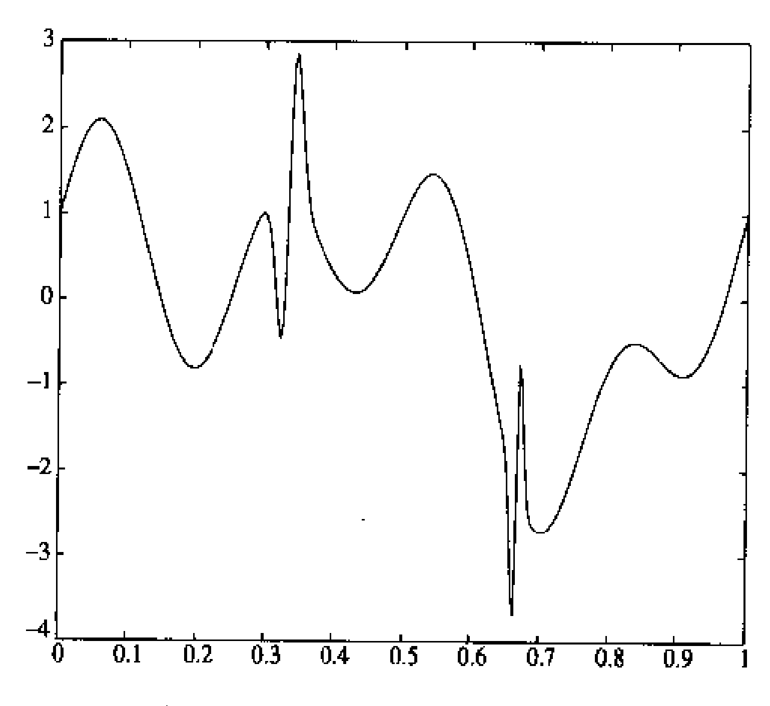


图 5.8 应用 Daubechies 小波时的V_8分量

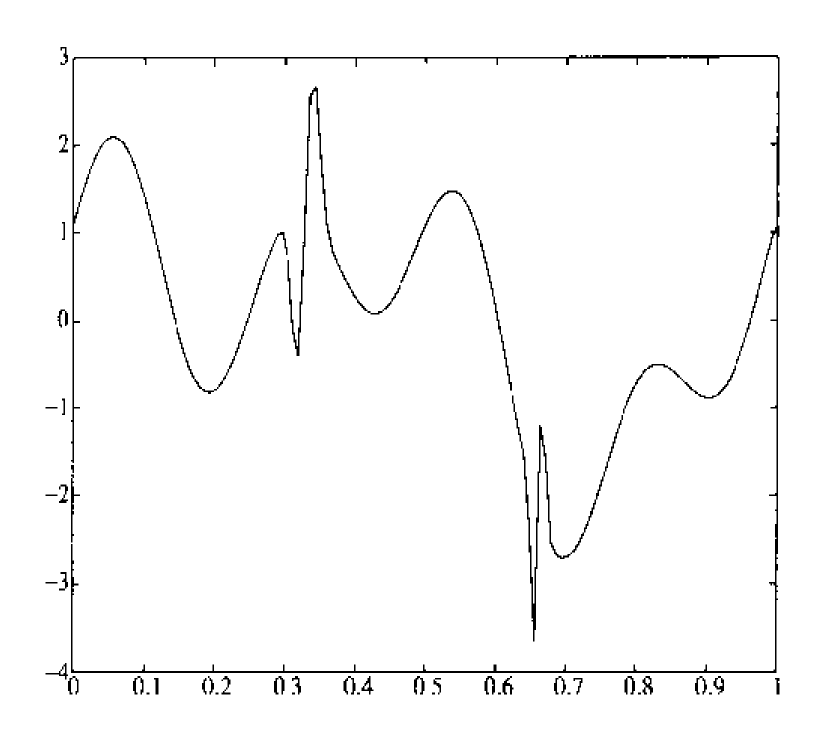


图 5.9　应用 Daubechies 小波时的 V_7 分量

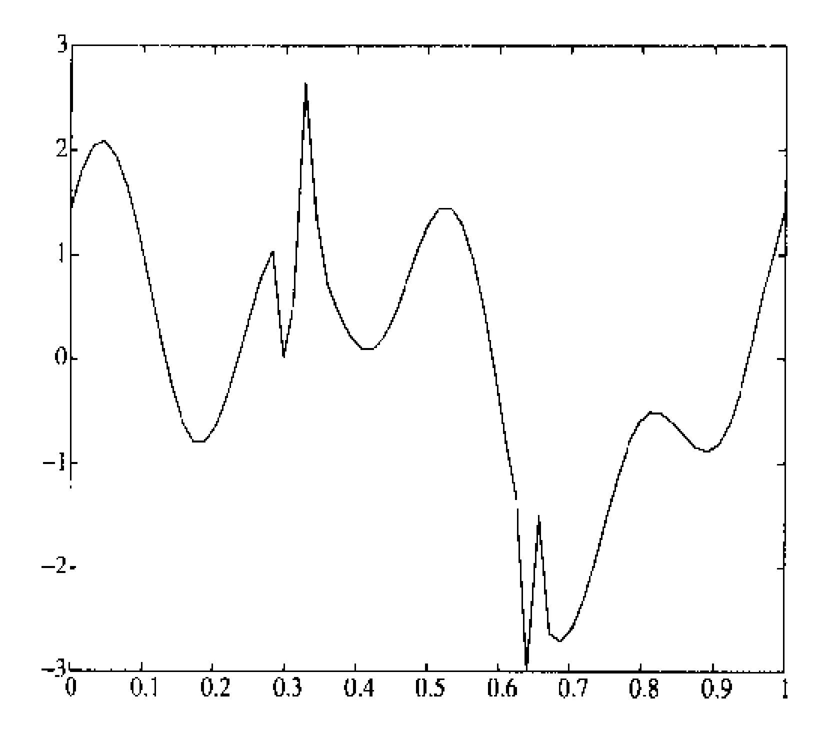


图 5.10　应用 Daubechies 小波时的 V_6 分量

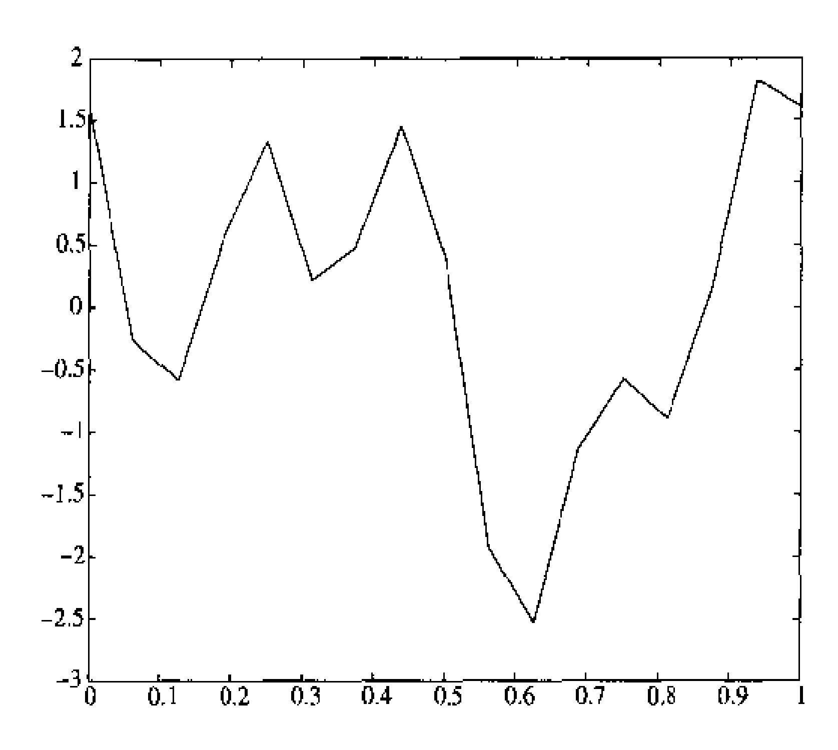


图 5.11 应用 Daubechies 小波时的 V_4 分量

5.2.2 重构算法

如在有关Haar小波的章节中所述，一旦信号分解完毕，就可以修改某些 $W_{j'}$。如果目的是滤除噪声，那么 f 的 $W_{j'}$ 分量中相应于不想要的频率部分可被舍弃，结果是噪声显著地减小了。如果目的是数据压缩，幅值较小的 $W_{j'}$ 分量可被舍弃，而且不会显著地改变原信号。仅仅显著的 $W_{j'}$（较大的 $b_k^{j'}$）需要被传输，于是就可以取得极大的数据压缩效果。不管怎样，因为 $W_{j'}$ 分量已被修改过，我们就需要一个重构算法，根据 V_j 的基 $\phi(2^j x - l)$ 重新组装被压缩或被滤波的信号。意思是，由 $j' = 1$ 开始，应用 $f_{j'} = f_{j'-1} + w_{j'-1}$，重建 $f_j \approx f$。算法流程图如下：

$$\begin{array}{ccccccccccccc} f_0 & \longrightarrow & f_1 & \longrightarrow & f_2 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & f_{j-2} & \longrightarrow & f_{j-1} & \longrightarrow & f_j \approx f \\ & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & \\ w_0 & & w_1 & & w_2 & & \cdots & & w_{j-2} & & w_{j-1} & & \end{array}$$

仍然把该算法分为三个主要步骤：初始化、迭代和终止。

初始化 此时我们拥有的是一个可能被修改过的系数集（由 0 级开始），包括 0 级近似系数 $\{a_k^0\}$ 和细节（小波）系数 $\{b_k^{j'}\}$，$j' = 0,\cdots,j$，即：

$$f_0(x) = \sum_{k\in Z} a_k^0 \phi(x-k) \in V_0 \tag{5.18}$$

$$w_{j'}(x) = \sum_{k\in Z} b_k^{j'} \psi(2^{j'}x - k) \in W_{j'},\quad 0 \leqslant j' < j \tag{5.19}$$

迭代　用离散滤波器形式描述本过程。令 $\widetilde{h}$，$\widetilde{\ell}$ 是如下序列：

$$\widetilde{h}_k := \overline{p_{1-k}}(-1)^k \tag{5.20}$$

$$\widetilde{\ell}_k := p_k \tag{5.21}$$

通过 $\widetilde{H}(x) = \widetilde{h} * x$ 和 $\widetilde{L}(x) = \widetilde{\ell} * x$，定义两个离散滤波器（卷积算子）$\widetilde{H}$ 和 $\widetilde{L}$。重构公式（5.13）中，以 $\sum_{l \in Z} p_{k-2l} a_l^{j-1}$ 和 $\sum_{l \in Z} (-1)^k \overline{p_{1-k+2l}} b_l^{j-1}$ 这两项和的形式，给出了 a_k^j。应用前面刚提到的滤波器，可把（5.13）式重写为：

$$a_k^j = \sum_{l \in Z} \widetilde{\ell}_{k-2l} a_l^{j-1} + \sum_{l \in Z} \widetilde{h}_{k-2l} b_l^{j-1} \tag{5.22}$$

这几乎就是两个卷积之和，仅有的差别是卷积的指标为 $k-l$ 而不是 $k-2l$。换句话说，（5.22）式是一个奇数项缺失（即 $\widetilde{\ell}_{k-(2l+1)}$）的卷积，可以简单地用零乘奇数项而复原回来。通过明确地写出前面几项，可以清楚地表示出该过程：

$$a_k^j = \cdots + \widetilde{\ell}_{k+4} a_{-2}^{j-1} + \widetilde{\ell}_{k+3} \cdot 0 + \widetilde{\ell}_{k+2} a_{-1}^{j-1} + \widetilde{\ell}_{k+1} \cdot 0 + \widetilde{\ell}_k a_0^{j-1} + \widetilde{\ell}_{k-1} \cdot 0 + \cdots + \text{类似的 } \widetilde{h}\, b \text{ 项}$$

为把该和式写成卷积形式，我们改变输入序列 a_l^{j-1} 的形式，通过把 0 均匀地分散于其中，形成一个在所有的奇数位置为 0 的新序列。原来的每个非零项给定一个新的偶数指标，这只要把原有指标倍乘即可，例如，a_{-1}^{j-1} 现在的下标是-2。该过程称为上取样，如下面的定义：

定义 5.15　令 $x = (\cdots x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \cdots)$ 为一序列，定义上取样算子 U 为：

$$Ux = (\cdots x_{-2}, 0, x_{-1}, 0, x_0, 0, x_1, 0, x_2, 0, \cdots)$$

或

$$(Ux)_k = \begin{cases} 0, & \text{若} k \text{为奇数} \\ x_{k/2}, & \text{若} k \text{为偶数} \end{cases}$$

那么（5.22）式表示的重构算法，可写成简练的离散滤波器形式（或卷积算子形式）：

$$\left.\begin{aligned} &\text{卷积形式：} a^j = \widetilde{\ell} * (Ua^{j-1}) + \widetilde{h} * (Ub^{j-1}) \\ &\text{算子形式：} a^j = \widetilde{L}Ua^{j-1} + \widetilde{H}Ub^{j-1} \end{aligned}\right\} \tag{5.23}$$

相应地分别称 $\widetilde{h}$ 和 $\widetilde{\ell}$ 为重构高通和重构低通滤波器。同分解算法的情况一样，这两个滤波器均不依赖于重构级数 j，从而使得这个迭代的重构过程既快又有效。图 5.12 示出了重构过程，用 $2\uparrow$ 形像地表示了上取样。

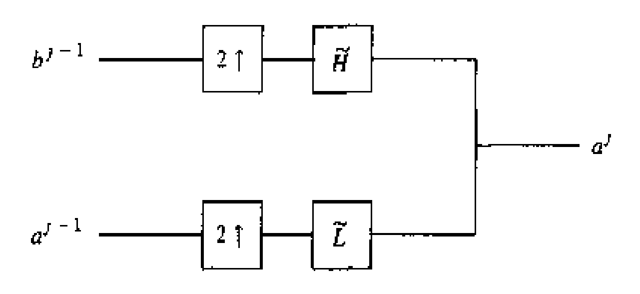


图 5.12 基于多分辨率分析的重构框图

对 Haar 小波，有 $p_0 = p_1 = 1$，那么本节所述的基于多分辨率分析的重构算法就退化为定理 4.14 所述的 Haar 重构算法了。

终止 分解和重构算法都使用了尺度系数p_k，而不是实际的$\phi(x)$或者$\psi(x)$的公式。为了得到重构信号 $f(x) = \sum_l a_l^j \phi(2^j x - l)$，根据定理 5.12（若$\int \phi = 1$），可以用$a_l^j$近似$f$在$x = l/2^j$处的值，所以重构过程没有用到$\phi$和$\psi$的公式。这实际上是非常幸运的，因为即使是 Daubechies 小波，其ϕ和ψ的计算也是相当复杂的（见 5.3.4 节和 6.4 节）。然而，因为ϕ和ψ的正交性严格地确保了分解和重构算法的顺利实施，所以实际上ϕ和ψ在幕后扮演了一个非常重要的角色。

5.2.3 用小波进行信号处理的一般过程

信号处理过程同第 4 章讨论的用 Haar 小波时的过程完全一样。

1. **取样**。这是一个预处理步骤。若信号连续[①]，那么必须以能够捕获原信号必要细节的速率取样。不同的应用决定了不同的取样率。例如，为了逼真地再现贝多芬第九交响曲，则一定要捕获到接近人耳听力极限的约为 20 kHz 频率的信号，此即为 Nyquist 频率。根据一般经验，此时的取样率应为 Nyquist 频率的 2 倍，即 40 kHz。
2. **分解**。信号取样后，可应用定理 5.12 来得到最高级的近似系数。循环使用（5.17）式直至到达一个合适的级别（例如$j = 0$）。该步的输出是各级别的小波系数（细节）和最低级别的近似系数。该系数集就是下步要处理的对象。
3. **信号处理**。通过舍弃非显著系数可以压缩信号，或者以某种方式使信号滤波或去噪。输出可被存储或立即重构以恢复经过处理的信号。在某些情况下，诸如奇异性检测，原信号不再有用，可以舍弃。
4. **重构**。调用（5.22）式的重构算法，该算法输出最高级近似系数。由定理 5.12 可知，处理后的信号与顶级重构系数近似相等。

① 连续信号通常又称为模拟信号。这样称谓的由来是，模拟计算机的输出是连续的信号。

例 5.16

用 Daubechies 小波对信号 f 进行分解和重构，该信号定义于如图 5.13 所示的单位区间上（与例 4.15 的信号相同）.

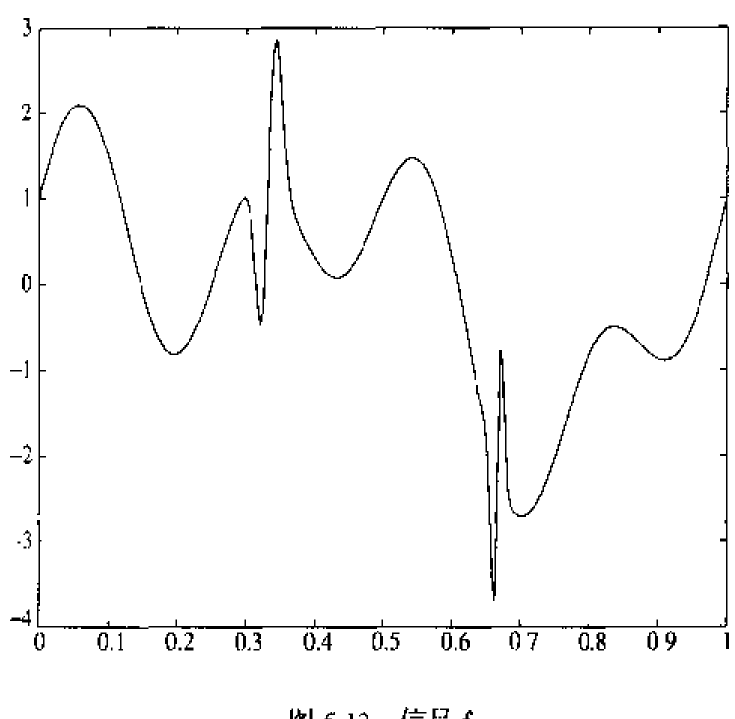


图 5.13　信号 f

如前所述，首先把该信号离散化为 2^8 个样值点［于是，$a_k^8 = f(k/2^8)$，$0 \leqslant k \leqslant 2^8 - 1$］，然后应用（5.17）式分解该信号，得到：

$$f = f_0 + w_0 + w_1 + w_2 + \cdots + w_7$$

其中，

$$f_0(x) = a_0^0\phi(x) \in V_0 \text{ 和 } w_{j'}(x) = \sum_{k \in Z} b_k^{j'} \psi(2^{j'} x - k) \in W_{j'}$$

这里的 ϕ 和 ψ 是 Daubechies 尺度函数和小波函数（稍后构造）。然后压缩并应用（5.22）式重构原信号，新的 a_k^8 作为重构信号在 $x = k/2^8$ 处的近似值。图 5.14、图 5.15 表示用 Daubechies 小波压缩 80%和 90%时的情况（令最小的 80%和 90%的 $|b_k^{j'}|$ 的系数为 0）。不妨把这些图形同第 4 章用 Haar 小波压缩 80%和 90%时的图 4.20、图 4.21 比较一下。应用本章算法压缩 80%和 90%时的相对误差分别为 0.0553 和 0.1794　而用 Haar 小波时的相对误差分别为 0.0895 和 0.1838（见例 4.15）。相同压缩比下，用 FFT 时的相对误差分别是 0.1228 和 0.1885。

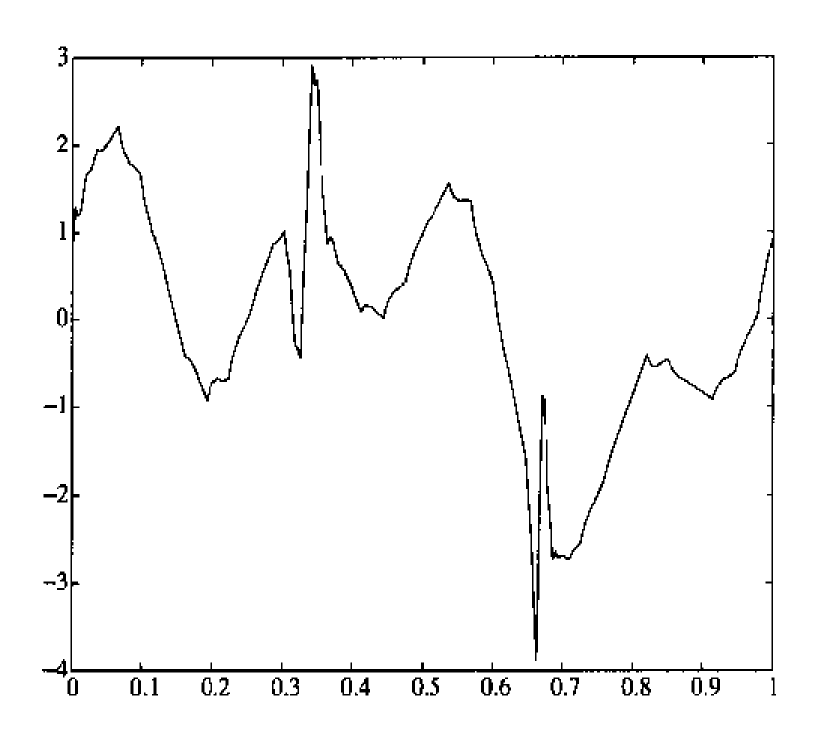


图 5.14　用 Daubechies 小波压缩 80%

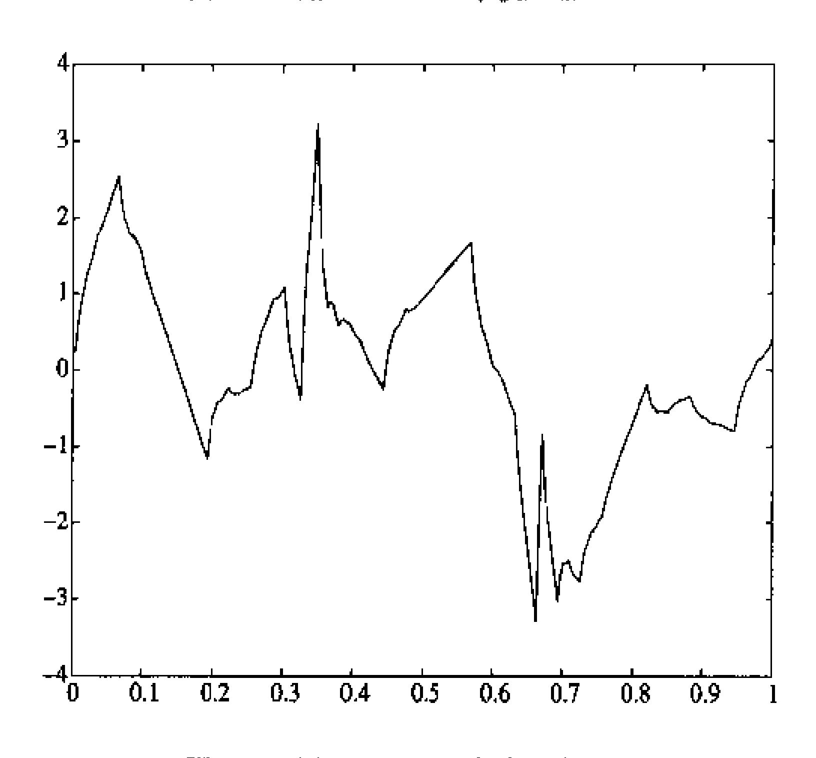


图 5.15　用 Daubechies 小波压缩 90%

不要从该例中得到如下印象：小波比 FFT 更适合数据压缩。本例的信号有两个孤立的尖峰，而这正好是小波比FFT更加擅长处理的地方。没有突变、快变化或者大致上具有周期特性的信号，用FFT可以处理得很好（甚至比小波还好）①。

① 这种情况实际中很少见——译者注。

5.3 傅里叶变换准则

在前节讨论的有关多分辨分析的例子中，构造Haar、线性样条和香农（Shannon）小波时，均从一个给定的取样空间开始。这些小波都有一定的局限性。例如，最早提及的、基于Haar尺度函数的分解算法，因为相应的Haar尺度函数和小波函数是不连续的，所以对大多数光滑函数它不能提供一个精确的近似。香农多分辨率分析是足够光滑的，但用于分解和重构的高通和低通滤波器具有无限冲激响应（即有无限个尺度系数）。而且，这些冲击响应即使指标n很大时，衰减也很慢。线性样条在这方面表现较好，但其冲击响应还是有无穷多项。第6章将构建一个尺度函数是连续的多分辨率分析，其分解和重构算法中应用的高通和低通滤波器具有有限的冲激响应。不是从取样空间开始，而是用傅里叶变换方法直接构建尺度函数。本节将描述并推导一些尺度函数必须满足的性质，然后通过傅里叶变换，得出这些性质的频域表示。

5.3.1 尺度函数

由定义，多分辨率分析是一系列子空间$\{V_j, j\in Z\}\in L^2(R)$的集合，这里的$V_j$是由$\{\phi(2^jx-k), k\in Z\}$张成的，此处构造的$\phi$要使$\{V_j, j\in Z\}$满足定义5.1中列出的各项性质。下列定理提出了一个有关ϕ的与这些性质等同的公式。

定理 5.17　设ϕ是紧支撑连续函数，满足标准正交条件：$\int\phi(x-k)\phi(x-l)\,dx=\delta_{kl}$。令$V_j$是由$\{\phi(2^jx-k); k\in Z\}$张成的，则：

1. 空间V_j满足可分条件（即$\cap V_j=\{0\}$）。
2. 若ϕ满足下列附加条件：

   （a）归一化：$\int\phi(x)\,dx=1$

   （b）尺度：$\phi(x)=\sum_k p_k\phi(2x-k)$，$p_k$是常量且数量有限

那么相应的V_j满足稠密条件：$\cup V_j=L^2(R)$，或者说，只要j足够大，那么$L^2(R)$中的函数可由V_j中的函数近似。

而且，若函数ϕ是紧支撑且连续的，满足归一化、尺度和标准正交条件，那么空间集$\{V_j, j\in Z\}$形成一个多分辨率分析。

证明　此处仅给出定理第1部分不太严格的证明，第1部分和第2部分的严格证明见附录A。

由定义，信号$f\in V_{-j}$是

$$\{\phi(x/2^j-k),\quad k=\cdots-2,-1,0,1,2\cdots\}$$

的线性组合　随着$j>0$的变大，$\phi(x/2^j-k)$的非零集也变大了。例如，若图 5.16 表示ϕ，那么$\phi(x/2^2)$则如图 5.17 所示。

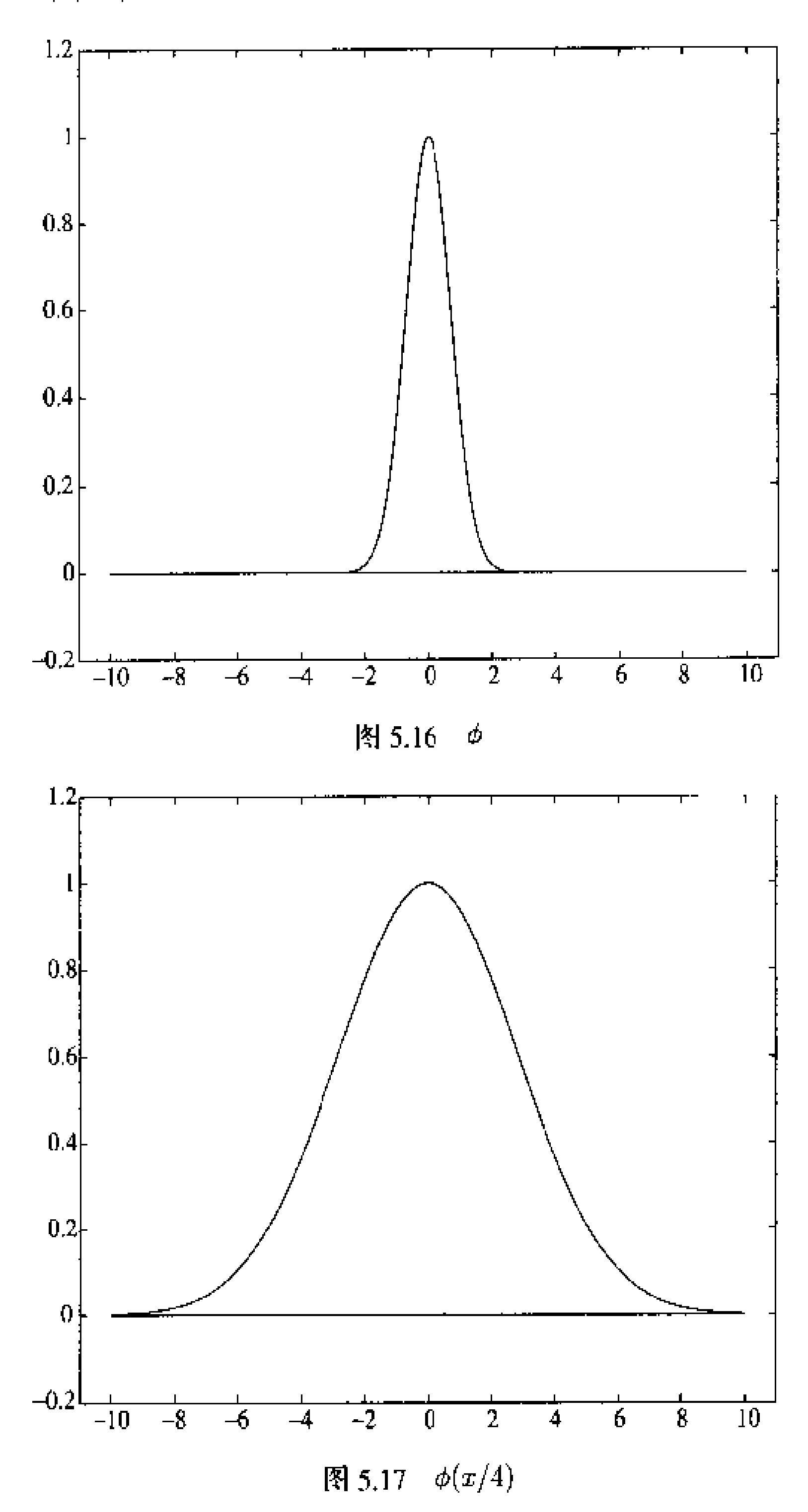


图 5.16　ϕ

图 5.17　$\phi(x/4)$

另一方面，作为$L^2(R)$的一个成员，f的能量有限，即$\int|f(t)|^2\,dt$是有限的。如图 5.16、图 5.17 所示，信号的能量随着信号非零集的变大而增加（$\int|f(t)|^2\,dt\to\infty$）。因此，属于所有$V_{-j}$的非零信号，随着$j\to\infty$，必有无限能量。由此得出结论，这个信号必恒等于 0。

5.3.2　频域的正交性

尺度函数ϕ是如何构造的？要构造一个尺度函数，必须先找到满足定理 5.9 的系数p_k。直接构造p_k很困难，而应用傅里叶变换，将会间接地带领我们找到一些构建p_k的简单步骤，从而最终得到ϕ。首先，假定一个连续的尺度函数存在，下面要看看相应的尺度系数p_k应满足什么性质，然后反过来看看如果p_k满足这些性质，那么会构造出一个什么样的尺度函数来。下节有一个例子，已知满足这些性质p_k，研究如何由这些系数构建一个特殊的连续尺度函数（Daubechies 提出）。

我们已经知道，函数f的傅里叶变换定义为：

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi}\, dx$$

因为$\hat{\phi}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \phi(x)\, dx$，归一化条件（$\int \phi = 1$）变成：

$$\hat{\phi}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

关于ϕ和ψ的标准正交条件在频域可表示为以下定理。

定理 5.18　函数ϕ满足标准正交条件，当且仅当

$$2\pi \sum_{k \in Z} |\hat{\phi}(\xi + 2\pi k)|^2 = 1\text{，对所有的}\xi \in R$$

此外，函数$\psi(x)$与$\phi(x-l)$正交，此处$l \in Z$，当且仅当

$$\sum_{k \in Z} \hat{\phi}(\xi + 2\pi k)\overline{\hat{\psi}(\xi + 2\pi k)} = 0\text{，}\ \xi \in R$$

证明　仅证明第 1 部分，第 2 部分的证明类似。标准正交条件可写为：

$$\int \phi(x-k)\overline{\phi(x-l)}\, dx = \delta_{kl} = \begin{cases} 1, & \text{若} k = l \\ 0, & \text{若} k \neq l \end{cases}$$

在上述积分中，用x取代$x-k$，并记$n = l - k$，则标准正交条件可重新表示为：

$$\int \phi(x)\overline{\phi(x-n)}\, dx = \delta_{0n} \qquad (5.24)$$

根据傅里叶变换的 Plancherel 恒等式（定理 2.12），有：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}\,d\xi \ , \ f, g \in L^2$$

对上式，令 $f(x) = \phi(x)$，$g(x) = \phi(x-n)$。由定理2.6的第6部分（令 $a = n, \lambda = \xi$），则 $\widehat{\phi(x-n)}(\xi) = \widehat{\phi}(\xi)e^{-in\xi}$。所以（5.24）式的标准正交条件可重新写为：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\phi}(\xi)\overline{\widehat{\phi}(\xi)e^{-in\xi}}\,d\xi = \delta_{0n} \text{ 或 } \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\phi}(\xi)|^2 e^{in\xi}\,d\xi = \delta_{0n}$$

把积分区域分隔分为一个个小的区间 $I_j = [2\pi j, 2\pi(j+1)]$，$j \in Z$，则上式为：

$$\sum_{j\in Z} \int_{2\pi j}^{2\pi(j+1)} |\hat{\phi}(\xi)|^2 e^{in\xi}\,d\xi = \delta_{0n}$$

用 $\xi + 2\pi j$ 取代 ξ，则积分限变为 0 至 2π：

$$\int_0^{2\pi} \sum_{j\in Z} |\hat{\phi}(\xi + 2\pi j)|^2 e^{in(\xi+2\pi j)}\,d\xi = \delta_{0n}$$

因为 $e^{2\pi ij} = 1$，$j \in Z$，所以有：

$$\int_0^{2\pi} \sum_{j\in Z} |\hat{\phi}(\xi + 2\pi j)|^2 e^{in(\xi)}\,d\xi = \delta_{0n} \tag{5.25}$$

令

$$F(\xi) = 2\pi \sum_{j\in Z} |\hat{\phi}(\xi + 2\pi j)|^2$$

则（5.25）式的标准正交条件变成：

$$(1/2\pi)\int_0^{2\pi} F(\xi)e^{in\xi}\,d\xi = \delta_{0n} \tag{5.26}$$

函数 F 是以 2π 为周期的，因为

$$\begin{aligned} F(\xi + 2\pi) &= 2\pi \sum_{j\in Z} |\hat{\phi}(\xi + 2\pi(j+1))|^2 \\ &= 2\pi \sum_{j'} |\hat{\phi}(\xi + 2\pi j')|^2 \quad (j+1 \to j') \\ &= F(\xi) \end{aligned}$$

因为 F 是周期性的，所以有傅里叶级数展开 $\sum \alpha_n e^{inx}$，这里的傅里叶系数由 $\alpha_n =$

$(1/2\pi)\int_0^{2\pi} F(\xi)e^{-in\xi}$给出。因此，标准正交条件（5.26）等价于$\alpha_{-n}=\delta_{n0}$，也就等价于$F(\xi)=1$，证毕。

一个有趣的恒等式。 作为上面定理的一个应用，可由上述定理得到一个有趣且有用的公式。因为 Haar 尺度函数ϕ在单位区间等于 1，其他处为 0，所以其傅里叶变换为：

$$\begin{aligned}\hat{\phi}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1 e^{-ix\xi}\,dx \\ &= \frac{e^{-i\xi}-1}{-\sqrt{2\pi}i\xi}\end{aligned} \tag{5.27}$$

通过简单的代数运算得：

$$|\hat{\phi}(\xi)|^2 = \frac{1-\cos\xi}{\pi\xi^2} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\sin(\xi/2)}{\xi/2}\right)^2$$

因为$\{\phi(x-k),\ k\in Z\}$是标准正交函数集，由定理 5.18 得到：

$$\sum_{k\in Z}\frac{\sin^2\left(\frac{\xi}{2}+\pi k\right)}{\left(\frac{\xi}{2}+\pi k\right)^2}=1$$

因为$\sin^2 x$是以π为周期的，所以上式的分子等于$\sin^2\frac{\xi}{2}$。两边除以$\sin^2\frac{\xi}{2}$并经适当化简，得到：

$$\csc^2\frac{\xi}{2}=\sum_{k\in Z}\frac{4}{(\xi+2\pi k)^2} \tag{5.28}$$

这是一个非常著名的公式，一般通过复分析技术得到。我们将它用于习题10，得到线性样条多分辨率分析的尺度函数。

5.3.3 频域的尺度方程

尺度条件$\phi(x)=\sum_k p_k\phi(2x-k)$通过傅里叶变换，得到其频域形式。

定理 5.19 尺度条件$\phi(x)=\sum_k p_k\phi(2x-k)$等价于

$$\hat{\phi}(\xi)=\hat{\phi}(\xi/2)P(e^{-i\xi/2})$$

这里的多项式P由下式给出：

$$P(z)=\frac{1}{2}\sum_{k\in Z}p_kz^k$$

证明 对 $\phi(x)=\sum_k p_k\phi(2x-k)$ 的两边做傅里叶变换，然后应用定理2.6有：

$$\hat{\phi}(\xi)=\frac{1}{2}\sum_{k\in Z}\hat{\phi}(\xi/2)p_ke^{-ik(\xi/2)}=\hat{\phi}(\xi/2)P(e^{-i\xi/2})$$

这里 $P(z)=(1/2)\sum_k p_kz^k$，证毕。

设ϕ满足尺度条件，以迭代形式应用定理5.19，有：

$$\hat{\phi}(\xi)=P(e^{-i\xi/2})\hat{\phi}(\xi/2)$$
$$\hat{\phi}(\xi/2)=P(e^{-i\xi/2^2})\hat{\phi}(\xi/2^2)$$

所以

$$\hat{\phi}(\xi)=P(e^{-i\xi/2})P(e^{-i\xi/2^2})\hat{\phi}(\xi/2^2)$$

按此法继续下去，有：

$$\begin{aligned}\hat{\phi}(\xi)&=P(e^{-i\xi/2})\cdots P(e^{-i\xi/2^n})\hat{\phi}(\xi/2^n)\\&=\left(\prod_{j=1}^{n}P(e^{-i\xi/2^j})\right)\hat{\phi}(\xi/2^n)\end{aligned}$$

给定尺度函数ϕ，对任何n上式保持成立。极限情况下，当$n\to\infty$时，上式成为：

$$\hat{\phi}(\xi)=\left(\prod_{j=1}^{\infty}P(e^{-i\xi/2^j})\right)\hat{\phi}(0)$$

若ϕ满足归一化条件$\int\phi(x)\,dx=1$，那么 $\hat{\phi}(0)=1/\sqrt{2\pi}$，所以

$$\hat{\phi}(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\prod_{j=1}^{\infty}P(e^{-i\xi/2^j})\tag{5.29}$$

这就给出了一个根据尺度多项式P得到尺度函数ϕ的傅里叶变换的公式。因为无限乘积难以计算，所以该公式在实际构建ϕ时不实用。此外还不得不用逆傅里叶变换来从其傅里叶变换系数恢复ϕ。但不管怎样，稍后将看到，它还是有理论意义的。

由满足尺度条件$\phi(x)=\sum_k p_k\phi(2x-k)$的函数$\phi$可给出一个多分辨率分析，相应的小波$\psi$满足下列方程（见定理5.10）：

$$\psi(x)=\sum_{k\in Z}(-1)^k\overline{p}_{1-k}\phi(2x-k)$$

令

$$Q(z)=-z\overline{P(-z)}$$

对于$|z|=1$, $Q(z)=(1/2)\sum_k(-1)^k\overline{p}_{1-k}z^k$（见习题13）。应用证明定理5.19的类似方法，可知：

$$\hat{\psi}(\xi)=\hat{\phi}(\xi/2)Q(e^{-i\xi/2}) \tag{5.30}$$

上述两定理结合起来，得出如下满足多分辨率分析存在必要条件的多项式$P(z)$

定理 5.20　设函数ϕ满足标准正交条件$\int\phi(x-k)\phi(x-l)\,dx=\delta_{kl}$，尺度条件$\phi(x)=\sum_k p_k\phi(2x-k)$。那么多项式$P(z)=\sum_k p_k z^k$满足下式：

$$|P(z)|^2+|P(-z)|^2=1\ ,\quad z\in C\ ,\ 且|z|=1$$

或等价地，$|P(e^{-it})|^2+|P(e^{-i(t+\pi)})|^2=1$，$0\leqslant t\leqslant 2\pi$。

证明　根据定理5.18，若ϕ满足标准正交条件，那么

$$\sum_{k\in Z}|\hat{\phi}(\xi+2\pi k)|^2=1/2\pi\ ,\quad \xi\in R \tag{5.31}$$

若ϕ满足尺度条件，那么（定理5.19）

$$\hat{\phi}(\xi)=\hat{\phi}(\xi/2)P(e^{-i\xi/2}) \tag{5.32}$$

把（5.31）式中的和分为偶部和奇部，并应用（5.32）式，得到：

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}&=\sum_{k\in Z}|\hat{\phi}(\xi+2\pi k)|^2\\
&=\sum_{l\in Z}|\hat{\phi}(\xi+(2l)2\pi)|^2+\sum_{l\in Z}|\hat{\phi}(\xi+(2l+1)2\pi)|^2\\
&=\sum_{l\in Z}\Big(|P(e^{-i(\xi/2+2l\pi)})|^2|\hat{\phi}(\xi/2+(2l)\pi)|^2+\\
&\qquad |P(e^{-i(\xi/2+(2l+1)\pi)})|^2|\hat{\phi}(\xi/2+\pi(2l+1))|^2\Big)\\
&=|P(e^{-i\xi/2})|^2\sum_{l\in Z}|\hat{\phi}(\xi/2+2\pi l)|^2+
\end{aligned}$$

$$|P(-e^{-i\xi/2})|^2\sum_{l\in Z}|\hat{\phi}((\xi/2+\pi)+2\pi l)|^2$$

上式的最后一个等号处应用了$e^{-2l\pi i}=1$和$e^{-\pi i}=-1$ 右边的两个和式均等于$1/2\pi$（在定理 5.18 中，分别用$\xi/2$ $\xi/2+\pi$代替ξ）。于是，上式化简为：

$$1=|P(e^{-i\xi/2})|^2+|P(-e^{-i\xi/2})|^2$$

因为该式对所有的$\xi\in R$均成立，于是得到，对所有$|z|=1$的复数z，$|P(z)|^2+|P(-z)|^2=1$成立，证毕.

下面的定理是针对函数ψ的，其相应的尺度多项式为Q，证明过程同定理 5.20 的证明过程类似（见习题 14）。

定理 5.21 设函数ϕ满足标准正交条件$\int\phi(x-k)\phi(x-l)\,dx=\delta_{kl}$和尺度条件$\phi(x)=\sum_k p_k\phi(2x-k)$。设$\psi(x)=\sum_k q_k\phi(2x-k)$，令$Q(z)=\sum_k q_k z^k$，那么下列两条命题等价：

- $\int\psi(x-k)\phi(x-l)\,dx=0$，$k,l\in Z$
- $P(z)\overline{Q(z)}+P(-z)\overline{Q(-z)}=0$，$|z|=1$

表述定理 5.20 和定理 5.21 的另一个方法是用矩阵

$$M=\begin{pmatrix}P(z) & P(-z)\\ Q(z) & Q(-z)\end{pmatrix}$$

即由标准正交尺度函数和标准正交小波函数相应的多项式组成的矩阵M，必是酉阵（即$MM^*=I$）。

例 5.22

下面用 Haar 尺度函数验证上述定理。对本例有$p_0=p_1=1$（其他的$p_k=0$）。于是，

$$P(z)=(1+z)/2$$

用本例验证定理 5.19 和定理 5.20。由（5.27）式中给出的Haar尺度函数的傅里叶变换可知：

$$P(e^{-i\xi/2})\hat{\phi}(\xi/2)=\frac{1}{2}(1+e^{-i\xi/2})\left(\frac{e^{-i\xi/2}-1}{-i\sqrt{2\pi}\xi/2}\right)=\frac{e^{-i\xi}-1}{-\sqrt{2\pi}i\xi}$$

所以$\hat{\phi}(\xi)=P(e^{-i\xi/2})\hat{\phi}(\xi/2)$，正如定理 5.19 所述。

同时注意到

$$|P(z)|^2+|P(-z)|^2=\frac{|1+z|^2}{4}+\frac{|1-z|^2}{4}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1+2\mathrm{Re}\{z\}+|z|^2}{4} + \frac{1-2\mathrm{Re}\{z\}+|z|^2}{4} \\
&= 1\text{，}\ z \in C,\ |z| = 1
\end{aligned}
$$

与定理 5.20 的结论相符。

应用同样的方法，Haar 小波的傅里叶变换为

$$
\hat{\psi}(\xi) = \frac{(e^{-i\xi/2}-1)^2}{i\sqrt{2\pi}\xi}
$$

其尺度多项式是$Q(z) = (1-z)/2$，所以

$$
\hat{\phi}(\xi/2)Q(e^{-i\xi/2}) = \frac{(e^{-i\xi/2}-1)}{-i\sqrt{2\pi}\xi/2}\frac{(1-e^{-i\xi/2})}{2} = \hat{\psi}(\xi)
$$

与（5.30）式相符合。

5.3.4　构建尺度函数的迭代步骤

前面几个定理表述了：如果ϕ存在，其尺度多项式必满足方程$|P(z)|^2 + |P(-z)|^2 = 1$，这里的$|z| = 1$。所以构建尺度函数ϕ的一个策略是，首先构建多项式P满足方程$|P(z)|^2 + |P(-z)|^2 = 1$，然后构造函数ϕ，使其满足尺度等式$\phi(x) = \sum_k p_k\phi(2x-k)$。

假设满足定理 5.20 的P已经构造出来了，且$P(1) = 1$。P的一个例子在下节给出。构造与P有关的尺度函数ϕ的策略见下述迭代过程。令 Haar 尺度函数表示为：

$$
\phi_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{若}\, 0 \leqslant x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}
$$

因为 Haar 尺度函数已经满足了标准正交性，那么定义

$$
\phi_1(x) = \sum_{k\in Z} p_k\phi_0(2x-k) \tag{5.33}
$$

一般地，总是根据ϕ_{n-1}来定义ϕ_n，即

$$
\phi_n(x) = \sum_{k\in Z} p_k\phi_{n-1}(2x-k) \tag{5.34}
$$

在下面的定理中，我们看到当$n\to\infty$时，ϕ_n收敛到某一函数，称为ϕ。对上式取极限，当$n\to\infty$时，有：

$$\phi(x)=\sum_{k\in Z}p_k\phi(2x-k)$$

所以，ϕ 也满足希望的尺度条件。因为ϕ_0满足标准正交条件，所以希望 $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \cdots$，直至$\phi$ 也满足标准正交条件。为此，需要对P增加一些限定条件。

定理 5.23 设 $P(z)=(1/2)\sum_k p_k z^k$ 是一多项式，满足下列条件：

- $P(1)=1$
- $|P(z)|^2+|P(-z)|^2=1$，对$|z|=1$
- $|P(e^{it})|>0$，对 $|t|\leqslant\pi/2$

令 $\phi_0(x)$ 是 Haar 尺度函数，令 $\phi_n(x)=\sum_k p_k\phi_{n-1}(2x-k)$，$n\geqslant 1$，那么序列$\phi_n$在$L^2$上逐点收敛到函数$\phi$，而且$\phi$ 满足以下的标准正交条件：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x-n)\phi(x-m)\,dx=\delta_{nm}$$

和尺度等式 $\phi(x)=\sum_k p_k\phi(2x-k)$。

证明 定理收敛性的严格证明比较复杂，留待附录A。一旦满足收敛性，那么ϕ 自动满足如前已述的尺度条件。这里我们给出一个解释：为什么ϕ 满足归一化和标准正交条件。首先由 ϕ_1开始，由（5.33）式，得到：

$$\phi_1(x)=\sum_{k\in Z}p_k\phi_0(2x-k)$$

与下述的傅里叶变换式等价：

$$\hat{\phi}_1(\xi)=P(e^{-i\xi/2})\hat{\phi}_0(\xi/2) \tag{5.35}$$

此处的证明与定理5.19 的证明过程类似。因为 $\hat{\phi}_0(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$，且 $P(1)=1$，显然 $\hat{\phi}_0(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$，所以$\phi_1$也满足归一化条件。

根据（5.35）式，有：

$$\sum_{k\in Z}|\hat{\phi}_1(\xi+2\pi k)|^2=\sum_{k\in Z}|P(e^{-i\xi/2+\pi ki})|^2|\hat{\phi}_0(\xi/2+\pi k)|^2$$

把右边的和式分为偶部和奇部，与定理 5.20 的证明过程类似，得到：

$$\begin{aligned}\sum_{k\in Z}|\hat{\phi}_1(\xi+2\pi k)|^2=&\sum_{l\in Z}|P(e^{-i\xi/2+2\pi li})|^2|\hat{\phi}_0(\xi/2+2\pi l)|^2\\&+\sum_{l\in Z}|P(e^{-i\xi/2+\pi(2l+1)i})|^2|\hat{\phi}_0(\xi/2+\pi(2l+1))|^2\end{aligned}$$

$$= |P(e^{-i\xi/2})|^2 \sum_{l\in Z} |\hat{\phi}_0(\xi/2 + 2\pi l)|^2$$

$$+ |P(-e^{-i\xi/2})|^2 \sum_{l\in Z} |\hat{\phi}_0(\xi/2 + \pi + 2\pi l)|^2$$

因为 ϕ_0 满足标准正交条件，右边两个和式均等于 $1/2\pi$（由定理 5.18）因此，

$$\sum_{k\in Z} |\hat{\phi}_1(\xi - 2\pi k)|^2 = \frac{1}{2\pi}\left(|P(e^{-i\xi/2})|^2 + |P(-e^{-i\xi/2})|^2\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \quad \text{根据对 } P \text{ 的假定}$$

由定理 5.18，ϕ_1 满足标准正交条件。经过与前面类似的讨论可知，若 ϕ_{n-1} 满足归一化和标准正交条件，那么 ϕ_n 也满足。依此类推，所有的 ϕ_n 均满足这些条件。取极限后得到，ϕ 也满足这些条件。

例 5.24

对于 Haar 小波，$p_0 = p_1 = 1$，k 为其他值时，$p_k = 0$。此时 $P(z) = (1+z)/2$。显然 $P(1) = 1$，而且在例 5.22 中我们已证明了 $|P(z)|^2 + |P(-z)|^2 = 1$，对于 $|z| = 1$。而且，$|P(e^{it}) = (1+e^{it})/2| > 0$，对于所有的 $|t| < \pi$。于是，定理 5.23 中的所有条件均满足。根据该定理中的迭代算法，由 Haar 尺度函数 ϕ_0 开始。由于 Haar 尺度系数为 $p_0 = p_1 = 1$，所以所有的 ϕ_k 均等于 ϕ_0。例如，由（5.33）式有：

$$\begin{aligned}
\phi_1(x) &= p_0\phi_0(2x) + p_1\phi_0(2x-1) \\
&= \phi_0(2x) + \phi_0(2x-1) \\
&= \phi_0(x) \quad \text{由（4.12）式}
\end{aligned}$$

类似地有，$\phi_2 = \phi_1 = \phi_0$，等等。这并不令人惊奇，因为迭代算法应用尺度等式来由 ϕ_{k-1} 导出 ϕ_k。若应用了 Haar 尺度等式和 Haar 尺度函数 ϕ_0，则迭代算法将不停地复制 ϕ_0。

例 5.25

Daubechies 小波　令 $P(z) = (1/2)\sum_k p_k z^k$，这里，

$$p_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{4}, \quad p_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{4}, \quad p_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{4}, \quad p_3 = \frac{1-\sqrt{3}}{4}$$

由习题11可知，$P(z)$满足定理5.23中的各个条件。因此，定理5.23中的迭代算法将最终收敛到一个尺度函数ϕ，这个ϕ是首先由Daubechies得到的。经过前4次迭代得到的ϕ_0、ϕ_1、ϕ_2和ϕ_3如图5.18至图5.21所示。

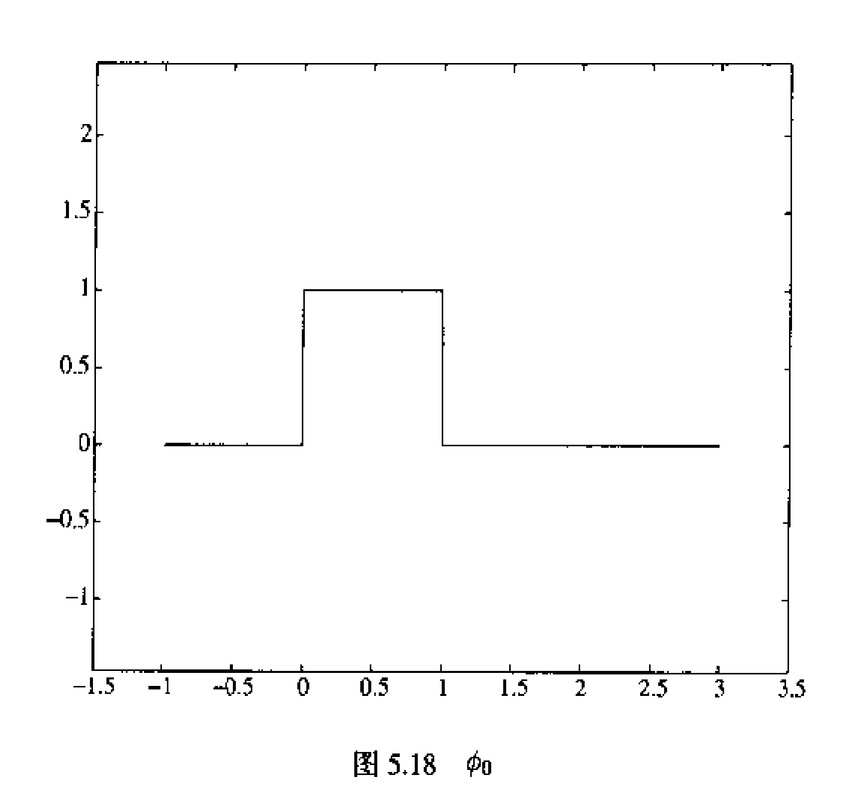


图 5.18　ϕ_0

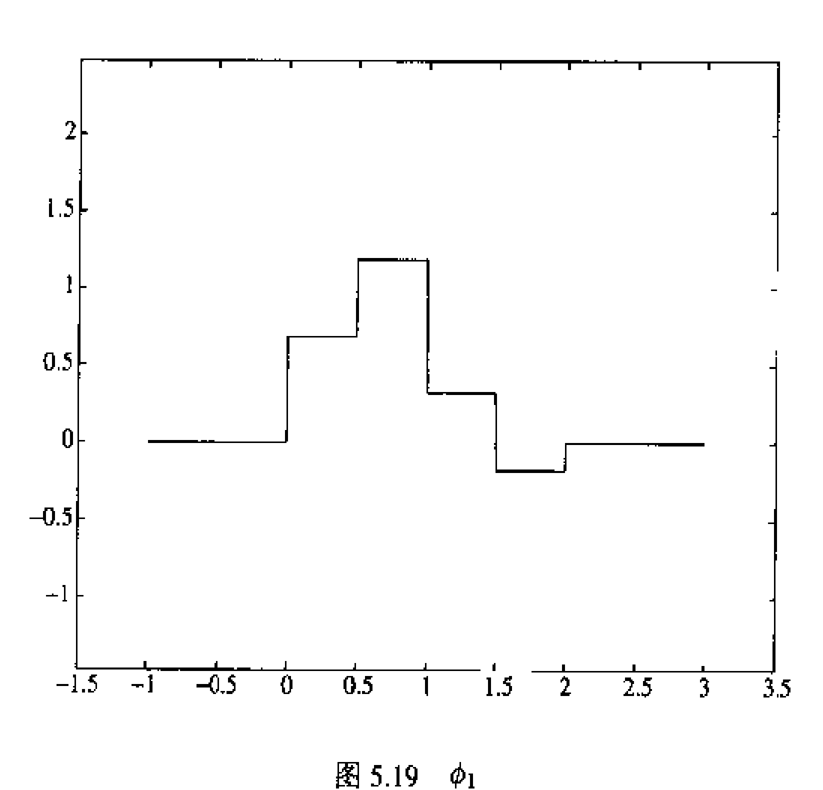


图 5.19　ϕ_1

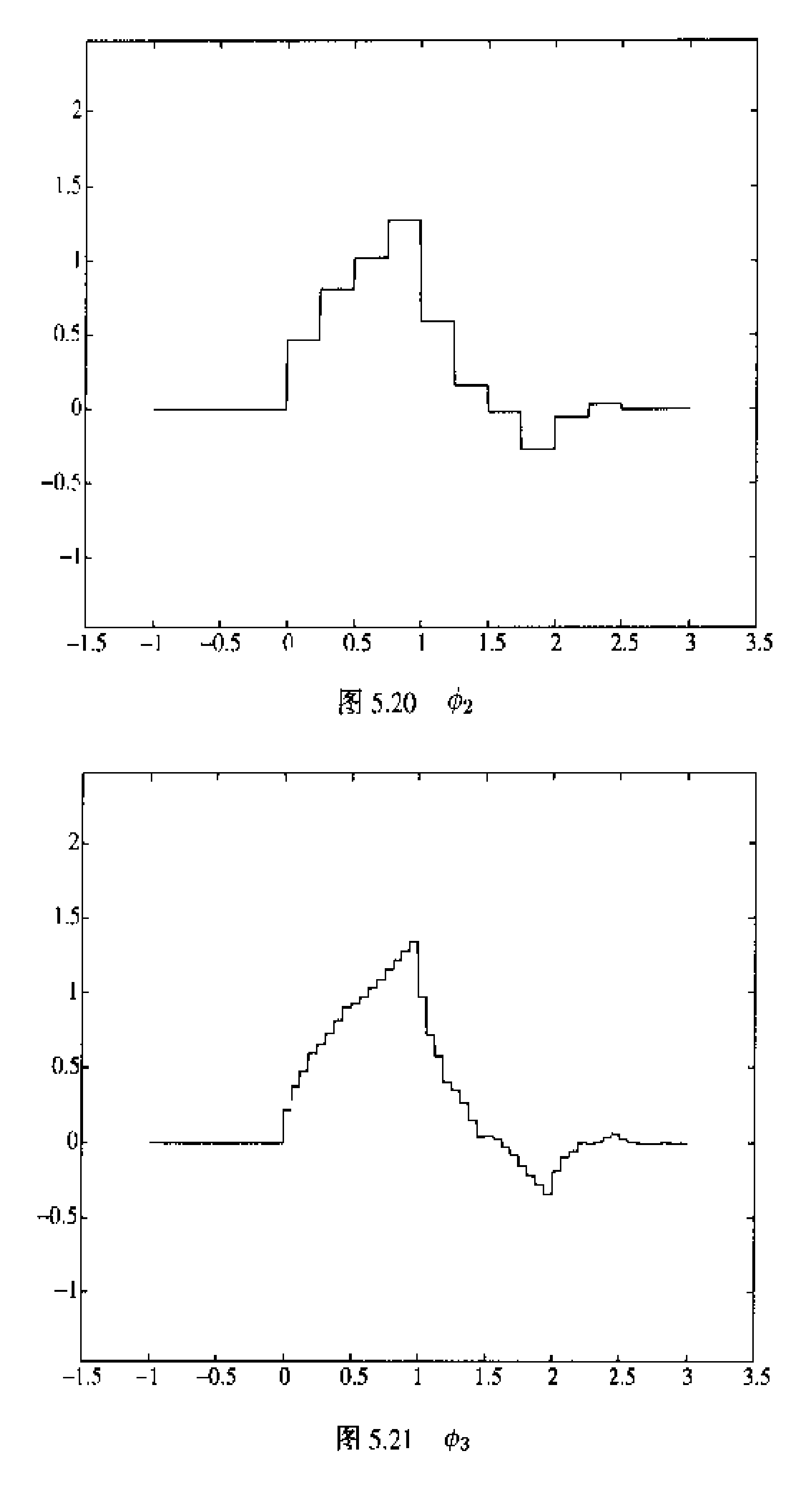


图 5.20　ϕ_2

图 5.21　ϕ_3

下一章将讨论如此选择 $p_0, \ldots, p_3$ 的原因，以及p_k的其他选择。

5.4　习题

1. 对以下的各个g，画出$g(x)$, $g(x+1)$, $2^{1/2}g(2x-3)$和$\frac{1}{2}g(\frac{1}{4}x-1)$的图形。

(a) $g(x) = e^{-x^2}$

(b) $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$

(c) $g(x) = \begin{cases} (1-x^2)^2 & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geqslant 1 \end{cases}$

(d) $g(x) = \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x}$

2. 复值函数f的支撑是指包含$f \neq 0$集合的最小闭集。f的支撑记为supp(f)。若supp(f)包含于一有界集，则称f是紧支撑的或具有紧支撑。求下列函数的支撑，其中哪些是紧的？

(a) $f(x) := \begin{cases} 1 \text{ 若 } k < x < k+1 & k \text{ 为奇数} \\ 0 \text{ 若 } k \leqslant x \leqslant k+1 & k \text{ 为偶数} \end{cases}$

(b) $g(x) := \begin{cases} x(1-x) & \text{若} 0 \leqslant x \leqslant 3 \\ 1 & \text{若} x > 3 \\ -1 & \text{若} -5 < x < 0 \\ 0 & \text{若} x \leqslant -5 \end{cases}$

(c) $h(r,\theta) := \begin{cases} r^2(1-r^2) & \text{若} 0 \leqslant r < 1 \quad \text{和} \ 0 \leqslant \theta < 2\pi \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

3. 定理 1.40 中的 Parseval 恒等式是通过傅里叶级数引入的，但实际上不一定如此，其适用条件可以更宽泛。令V是一个复内积空间，有标准正交基$\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$。证明若$f \in V$和$g \in V$的表示式如下：

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} a_k u_k \quad \text{和} \quad g = \sum_{k=1}^{\infty} b_k u_k$$

那么

$$\langle f, g \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \bar{b}_k$$

上式同样称为 Parseval 恒等式。指标k的具体形式无关紧要（双指标集也可以），只要是可列的。

4. 用习题 3 得到的 Parseval 恒等式证明以下公式。

（a）定理 5.9 的 1 式

（b）证明

$$\langle \psi_{0m}, \psi_{0l} \rangle = \frac{1}{2} \sum_{k \in Z} \overline{p_{1-k+2m}} \, p_{1-k+2l}$$

这里的 ψ 在（5.5）式中定义。提示：改变（5.5）式的求和次序，并且利用 $\{2^{1/2}\phi(2x-k)\}_{k\in Z}$ 是标准正交的事实。

（c）证明

$$\langle \phi_{0l}, \psi_{0m} \rangle = \frac{1}{2}\sum_{k\in Z}(-1)^k p_{1-k+2m}\, p_{k-2l}$$

这里的 ψ 在（5.5）式中定义。提示：改变（5.5）式的求和次序，并且利用 $\{2^{1/2}\phi(2x-k)\}_{k\in Z}$ 是标准正交的事实。

5. 在习题 2 中已经定义了函数的支撑。证明若多分辨率分析中的尺度函数 ϕ 是紧支撑的，那么定理 5.6 的尺度关系式中只有有限个非零的系数。

6. 设 $\{V_j : j \in Z\}$ 是一个依尺度函数 ϕ 的多分辨率分析，ϕ 是连续的且具有紧支撑。

（a）求以下阶梯函数在 V_j 上的正交投影 u_j：

$$u(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & x < 0 \text{或} x > 1 \end{cases}$$

（b）若 $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\,dx = 0$，证明只要 j 足够大，则 $\|u - u_j\| \geqslant \frac{1}{2}$。

（c）解释一下为什么上述结论意味着 $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\,dx = 0$。

7. 当 p_k 为复数时，在证明定理 5.9 的 4 式时所提出的 E 和 O 也可以为复数。证明此时由方程 $|E|^2 + |O|^2 = 2$ 和 $E + O = 2$ 仍能得到惟一解 $E = O = 1$。

8. （Shannon 多分辨率分析）。对 $j \in Z$，令 V_j 是所有由能量有限函数 f 组成的空间，在区间 $[-2^j\pi, 2^j\pi]$ 以外，f 的傅里叶变换为 $\widehat{f} = 0$，即 $f \in L^2(R)$ 是带限的，且有支撑 $\text{supp}(\widehat{f}) \subseteq [-2^j\pi, 2^j\pi]$。

（a）证明 $\{V_j\}_{j\in Z}$ 满足定义 5.1 的关于多分辨率分析的条件 1~4。

（b）sinc 的定义如（5.1）式中所示，证明 $\phi(x) := \text{sinc}(x)$，满足定义 5.1 的性质 5，所以它是 V_j 的一个尺度函数（提示：利用取样定理 2.23 来证明 $\{\phi(x-k)\}$ 是 V_0 的一个标准正交基）。

（c）证明 ϕ 满足尺度关系

$$\phi(x) = \phi(2x) + \sum_{k\in Z} \frac{2(-1)^k}{(2k+1)\pi}\phi(2x - 2k - 1)$$

（d）求关于 ϕ 的小波 ψ 的展开式。

（e）求高、低通分解滤波器 h 和 ℓ。

（f）求高、低通重构滤波器 $\widetilde{h}$ 和 $\widetilde{\ell}$。

9. （线性样条多分辨率分析）。对 $j \in Z$，令 V_j 是所有能量有限函数 f 的空间，f 是

连续和分段线性的，其拐点只能出现在二进点$k/2^j$, $k \in Z$处。

（a）证明$\{V_j\}_{j \in Z}$满足定义 5.1 的关于多分辨率分析定义的性质 1~4。

（b）令$\varphi(x)$为“帐篷形函数”：

$$\varphi(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ 1-x, & 0 < x \leqslant 1 \\ 0, & |x| > 0 \end{cases}$$

证明$\{\varphi(x-k)\}_{k \in Z}$是$V_0$的一个基（非正交的）。求$\varphi$的尺度关系式。

10. 令$\varphi(x)$为习题 9 中所示的帐篷形函数。

（a）证明

$$\widehat{\varphi}(\xi) = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin^2(\xi/2)}{\xi^2}$$

（b）证明

$$\sum_{k \in Z} \frac{1}{(\xi + 2\pi k)^4} = \frac{3 - 2\sin^2(\xi/2)}{48 \sin^4(\xi/2)}$$

[提示：对（5.28）式两端微分两次，然后经适当化简。]

（c）证明通过如下傅里叶变换定义的函数ϕ

$$\hat{\phi}(\xi) := 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin^2(\xi/2)}{\xi^2 \sqrt{1 - \frac{2}{3}\sin^2 \frac{\xi}{2}}}$$

其平移系$\{\phi(x-k)\}_{k \in Z}$构成标准正交基。[提示：先用（b）得到$\sum_{k \in Z} \left|\widehat{\phi}(\xi + 2\pi k)\right|^2 = \frac{1}{2\pi}$，然后应用定理 5.18。]

11. 令$P(z) = (1/2)\sum_{k=0}^{3} p_k z^k$，这里，

$$p_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{4} \quad p_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{4} \quad p_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{4} \quad p_3 = \frac{1-\sqrt{3}}{4}$$

证明$P(z)$满足定理5.23的条件。利用符号计算语言，例如 Maple，证明等式$|P(z)|^2 + |P(-z)|^2 = 1$，这里$|z| = 1$。由$y = |P(e^{it})|$的图形，证明$|P(e^{it})| > 0$，这里$|t| \leqslant \pi/2$。

12. 设f是一连续可微函数，对$0 \leqslant x < 1$有$|f'(x)| \leqslant M$。用下面（a）中的阶梯函数一致地逼近f，容限为ϵ，该阶梯函数属于由$\phi(2^n x - k)$, $k \in Z$产生的空间V_n，这里的ϕ是 Haar 尺度函数。

（a）对$1 \leqslant j \leqslant 2^n$，令$a_j = f(j/2^n)$，于是形成以下的阶梯函数：

$$f_n(x) = \sum_{j \in Z} a_j \phi(2^n x - j)$$

（b）证明若n远远大于$\log_2(M/\epsilon)$，则$|f(x) - f_n(x)| \leqslant \epsilon$。

13. 令$P(z) = \sum_k p_k z^k$，定义：

$$Q(z) = -z\overline{P(-z)}$$

对$|z| = 1$，证明$Q(z) = (1/2)\sum_k (-1)^k \overline{p}_{1-k} z^k$。本习题建立起了一个由尺度函数的多项式$P$到小波函数$\psi$的多项式的关系式。

14. 用证明定理 5.20 的基本思想来证明定理 5.21。

15. 当信号f是分段连续时，通过把f的支撑分为几个小的f在其上连续的子区间，来证明定理 5.12。位于不连续处附近的点$l/2^j$必须小心对待，因为此时的近似式$f(x) \approx f(l/2^j)$不一定成立。然而这些麻烦点的数量是固定的，而且$\phi(2^j x - l)$的支撑将随j的增加而越来越小。所以可以证明，当j变大时，相应于这些麻烦点的项$\alpha_l \phi(2^j x - l)$可忽略不及。

16. 用定理 5.18 第 1 部分的证明做为参考，证明该定理的第 2 部分。

17. 习题 5 已经证明了若ϕ是紧支撑的，则仅有有限数量的p_k非零。应用（5.34）式所示的迭代过程构建ϕ，证明若仅有有限数量的p_k非零，那么ϕ是紧支撑的。

18. （滤波器的长度和支撑。）证明，当$k > N$和$k < 0$时，若尺度关系式中所有的p_k均为 0，而且ϕ_n收敛到ϕ，那么ϕ具有紧支撑。根据N，求ϕ的支撑。

第 6 章 Daubechies 小波

到目前为止我们见到的那些小波（Haar、Shannon 和线性样条小波）都有不少缺陷。Haar 小波是紧支撑的但不连续。Shannon 小波很光滑但分布于整个实轴，而且趋近于无穷时衰减很慢。线性样条小波是连续的，但其正交尺度函数和相应的小波函数，如同Shannon 小波一样，具有无限支撑，然而它在趋近于无穷时衰减很快。

这些小波和其他一些具有类似性质的小波，在Daubechies 发明以她的名字命名的小波系以前，恐怕只能是惟一的选择了。在 Daubechies 小波系里最简单的是 Haar 小波，也是惟一一个不连续的小波，其他的均为连续且是紧支撑的小波。更有甚者，在该小波系中，随着级数的增加，小波变得越来越光滑，而且它们可以有预知的连续导数，其光滑性足以满足特定应用要求。下面我们跳过一阶Daubechies 小波（Haar 小波），直接讨论如何构造二阶 Daubechies 小波 ψ_2。

6.1 Daubechies 小波的构造

定理 5.23 列出了关于多项式P的三个充分条件，可保证下面所描述的迭代过程最终能产生一个尺度函数。给定一个多项式$P(z)$，令

$$p(\xi) = P(e^{-i\xi})$$

根据函数p，定理 5.23 中假设的 3 个条件可表述为：

$$p(0) = 1 \tag{6.1}$$

$$|p(\xi)|^2 + |p(\xi+\pi)|^2 = 1 \tag{6.2}$$

$$|p(\xi)| > 0 \quad \text{for } -\pi/2 \leqslant \xi \leqslant \pi/2 \tag{6.3}$$

下面将描述一个由 Daubechies 推导出的多项式，它满足（6.1）~（6.3）式。

由习题 5.22 知，与 Haar 尺度函数相关的多项式为：

$$p_0(\xi) = P(e^{-i\xi}) = \frac{1+e^{-i\xi}}{2} = e^{-i\xi/2}\cos(\xi/2)$$

如此的p_0满足（6.1）~（6.3）式。然而 Haar 尺度函数是不连续的。产生连续尺度函数的一个方法是进行卷积。实际上，Haar 尺度函数同其自身做卷积，可看做等价于下列

连续线性样条（第 2 章的习题 5）：

$$\phi_0 * \phi_0(x) = \begin{cases} 1-|x-1| & 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

见图 6.1。因为卷积的傅里叶变换等于傅里叶变换的乘积，特别地，$\phi*\phi*\cdots*\phi$（n 个）的傅里叶变换为 $(2\pi)^{n/2}(\hat{\phi})^n$。考虑到（5.29）式是尺度函数的傅里叶变换，首先试验 $p(\xi) = p_0(\xi)^n = e^{-in\xi/2}(\cos\xi/2)^n$（$n$ 为某个适当的整数），作为产生连续尺度函数的一个多项式。然而此时性质（6.2）不再满足（除非 $n = 1$，即 Haar 小波时的情况），所以该试验失败。

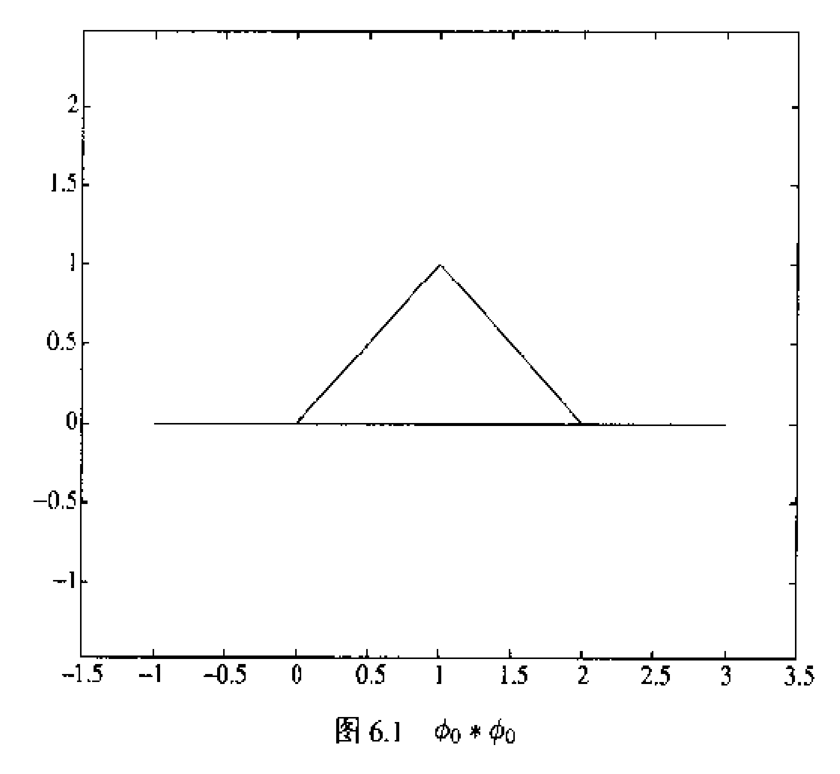


图 6.1 $\phi_0 * \phi_0$

下面考虑不是简单地把 p_0 取 n 次幂。我们把恒等式 $\cos^2(\xi/2)+\sin^2(\xi/2)=1$ 两边都取 n 次幂。对 $n=3$，有：

$$1 = \left(\cos^2(\xi/2)+\sin^2(\xi/2)\right)^3 \tag{6.4}$$

或者

$$1 = \cos^6(\xi/2) + 3\cos^4(\xi/2)\sin^2(\xi/2) + 3\cos^2(\xi/2)\sin^4(\xi/2) + \sin^6(\xi/2)$$

应用等式 $\cos(u) = \sin(u+\pi/2)$ 和 $\sin(u) = -\cos(u+\pi/2)$ 于上式右边的最后两项，有：

$$\begin{aligned} 1 = {} & \cos^6(\xi/2) + 3\cos^4(\xi/2)\sin^2(\xi/2) + 3\sin^2((\xi+\pi)/2)\cos^4((\xi+\pi)/2) \\ & + \cos^6((\xi+\pi)/2) \end{aligned}$$

若我们取

$$|p(\xi)|^2 = \cos^6(\xi/2) + 3\cos^4(\xi/2)\sin^2(\xi/2)$$

则前述等式变为：

$$1 = |p(\xi)|^2 + |p(\xi+\pi)|^2$$

性质（6.2）满足。因为当 $|\xi| \leqslant \pi/2$ 时，有 $\cos(\xi/2) \geqslant 1/\sqrt{2}$，所以性质（6.3）亦满足。注意到 $|p(0)| = 1$。所以剩下的问题是确定 p 本身（以前只定义了 $|p|$）。首先，重写 $|p|$ 的定义：

$$\begin{aligned}|p(\xi)|^2 &= \cos^4(\xi/2)\left(\cos^2(\xi/2) + 3\sin^2(\xi/2)\right) \\ &= \cos^4(\xi/2)|\cos(\xi/2) + \sqrt{3}i\sin(\xi/2)|^2\end{aligned}$$

上式两边开方，选择

$$p(\xi) = \cos^2(\xi/2)\left(\cos(\xi/2) + \sqrt{3}i\sin(\xi/2)\right)\alpha(\xi)$$

这里的 $\alpha(\xi)$ 是一个复值表达式且 $|\alpha(\xi)| = 1$（稍后讨论）。

为确定多项式 P ［即 $p(\xi) = P(e^{-i\xi})$］，应用恒等式：

$$\cos(\xi/2) = \frac{e^{i\xi/2} + e^{-i\xi/2}}{2}, \quad \sin(\xi/2) = \frac{e^{i\xi/2} - e^{-i\xi/2}}{2i}$$

从而有：

$$p(\xi) = \frac{1}{8}(e^{i\xi} + 2 + e^{-i\xi})\left(e^{i\xi/2} + e^{-i\xi/2} + \sqrt{3}e^{i\xi/2} - \sqrt{3}e^{-i\xi/2}\right)\alpha(\xi)$$

选择 $\alpha(\xi) = e^{-3i\xi/2}$ 以便消除所有正的分数次幂，展开并合并同类项后，有：

$$p(\xi) = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{8}\right) + e^{-i\xi}\left(\frac{3+\sqrt{3}}{8}\right) + e^{-2i\xi}\left(\frac{3-\sqrt{3}}{8}\right) + e^{-3i\xi}\left(\frac{1-\sqrt{3}}{8}\right)$$

下面的多项式即满足方程 $p(\xi) = P(e^{-i\xi})$：

$$P(z) = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{8}\right) + \left(\frac{3+\sqrt{3}}{8}\right)z + \left(\frac{3-\sqrt{3}}{8}\right)z^2 + \left(\frac{1-\sqrt{3}}{8}\right)z^3$$

因为 p 满足（6.1）至（6.3），所以 P 满足定理 5.23 的假设。

因为 $P(z) = (1/2)\sum_k p_k z^k$，所以对本例有：

$$p_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{4}, \quad p_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{4}, \quad p_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{4}, \quad p_3 = \frac{1-\sqrt{3}}{4} \qquad (6.5)$$

ϕ 的建立正是应用了定理 5.23 中所述的迭代过程。第 5 章图 5.19 至图 5.21 描述了前四次迭代过程的情况。下面的图 6.2 表示了迭代多次后 ϕ 的（近似）图形。

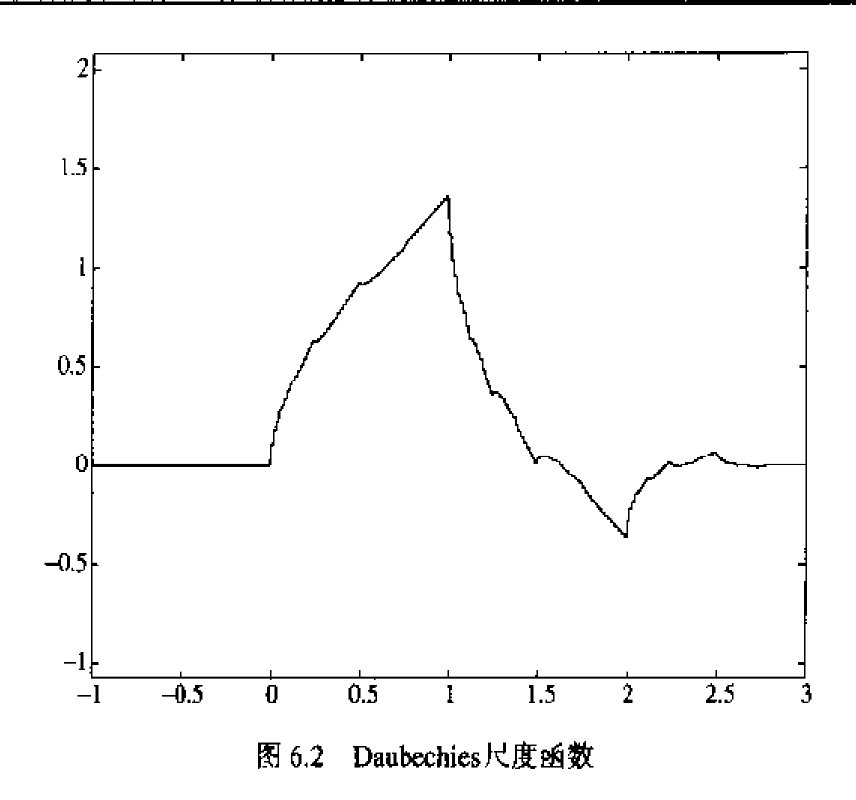


图 6.2 Daubechies 尺度函数

与 Daubechies 尺度函数 ϕ 有关的小波函数 ψ 将如何构造呢？如定理 5.10 所述，一旦确定了系数 p_k，并构建了 ϕ，那么相应的小波由下式给出：

$$\psi(x)=\sum_{k\in Z}(-1)^k p_{1-k}\phi(2x-k)$$

图 6.3 显示了相应的小波函数的（近似）图形。

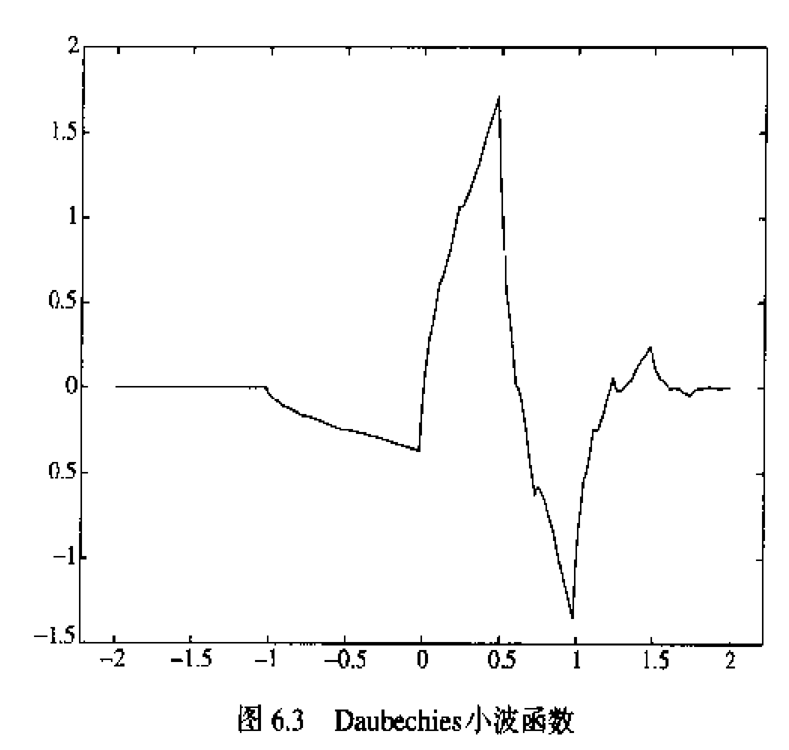


图 6.3 Daubechies 小波函数

与 Haar 尺度和小波函数不同，Daubechies 尺度和小波函数是连续的，但却不可微。

6.2 分类、矩和平滑性

一些更光滑的尺度函数和小波函数，可以通过对(6.4)式取 $n=3$ 的更高次幂来获得．在下文中将使用奇数次幂，即 $n=2N-1$。实际上，Daubechies 发现，对任意的 N，有 $2N$ 个非零的实的尺度系数 $p_0,\cdots,p_{2N-1}$，可以构成支撑区间为 $0\leqslant t\leqslant 2N-1$ 的尺度函数和小波函数。适当选择这些系数，以便 $2N-1$ 次多项式 $P_N(z):=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2N-1}p_k z^k$ 有如下分解：

$$P_N(z)=(z+1)^N\tilde{P}_N(z) \tag{6.6}$$

这里 $\widetilde{P}_N$ 的阶数为 $N-1$，且 $\tilde{P}_N(-1)\neq 0$。这就保证了相应的小波将有准确的 N 阶"消失矩"。后面我们将讨论其含义及其重要性。

除了 P_N 中的系数可以反转外（反转的含义见习题1），这些系数是惟一的。我们已经研究了 $N=1$（Haar）和 $N=2$（Daubechies）时的两种情况，相应的多项式分别为 $P_1(z)=\frac{1}{2}(1+z)^1$ 和 $P_2(z)=\left(\frac{1+\sqrt{3}}{8}+\frac{1-\sqrt{3}}{8}z\right)(1+z)^2$ 根据(6.6)式的因式分解，有 $\widetilde{P}_1(x)=\frac{1}{2}$，$\widetilde{P}_2(x)=\frac{1+\sqrt{3}}{8}+\frac{1-\sqrt{3}}{8}z$。

由 P_N 产生的尺度函数 ϕ_N 和小波 ψ_N 均有以无限乘积形式给出的傅里叶变换。因为 P_N 的系数是实的，$\overline{P_N(-z)}=P_N(-\bar{z})$，那么由式(5.29)和式(5.30)有：

$$\hat{\phi}_N(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\prod_{j=1}^{\infty}P_N(e^{-i\xi/2^j}) \tag{6.7}$$

$$\hat{\psi}_N(\xi)=-e^{-i\xi/2}P_N(-e^{i\xi/2})\,\hat{\phi}_N(\xi/2) \tag{6.8}$$

注意，因为 $P_N(-1)=0$，所以 $\hat{\psi}_N(0)=0$。若 $N>1$，因为 $P_N'(-1)=0$，所以我们也有 $\hat{\psi}_N'(0)=0$。一般地，由习题2有：

$$\hat{\psi}_N^{(k)}(0)=\begin{cases}0, & k=0,\cdots,N-1\\ -N!(-i/2)^N\widetilde{P}_N(-1)/\sqrt{2\pi}\neq 0, & k=N\end{cases} \tag{6.9}$$

由此得出了如下结论。

系 6.1 对于 Daubechies 小波 ψ_N，有：

$$\int_{-\infty}^{\infty}x^k\psi_N(x)\,dx=\begin{cases}0, & k=0,\cdots,N-1\\ -\left(2^{-N}N!/\sqrt{2\pi}\right)\widetilde{P}_N(-1), & k=N\end{cases} \tag{6.10}$$

证明 系由(6.9)式和傅里叶变换的性质（定理2.6的性质2）得到：

$$\mathcal{F}[t^n f(t)](\lambda) = i^n \frac{d^n}{d\lambda^n}\mathcal{F}[f(t)](\lambda)$$

只要令 $f = \psi_N$，$n = k$，$\lambda = 0$ 即可。

形如 $\int_{-\infty}^{\infty} x^k \rho(x)\, dx$ 形式的积分称为分布 ρ 的矩。矩依赖于该积分的存在（积分非零）而存在。因此我们可说系 6.1 的意思是，函数 ψ_N 前 N 个矩消失了（为零）。简言之，ψ_N 有 N 阶消失矩。

Daubechies 小波根据其具有的消失矩来分类。尺度函数和小波函数的光滑性随消失矩而增加。$N = 1$ 时即 Haar 小波，其尺度函数和小波函数不连续。$N = 2$ 时的 Daubechies 的尺度函数和小波函数是连续的，但是显然没有光滑的导数。$N = 3$ 时，小波函数和尺度函数均连续可微。当 N 增大时，ϕ_N 和 ψ_N 连续可导的数目大约为 $\frac{N}{5}$。所以，为了 10 次连续可导，需要取 $N \approx 50$。下表中，列出了 Daubechies 小波的近似尺度系数（N 为 1 至 4）。显然，表中 $N = 2$ 时给出的尺度系数是（6.5）式中给出的系数的近似[1]。

尺度系数	消失矩的数目			
p_k	$N=1$	$N=2$	$N=3$	$N=4$
p_0	1	0.683013	0.470467	0.325803
p_1	1	1.183013	1.141117	1.010946
p_2	0	0.316987	0.650365	0.892200
p_3	0	−0.183013	−0.190934	−0.039575
p_4	0	0	−0.120832	−0.264507
p_5	0	0	0.049817	0.043616
p_6	0	0	0	0.023252
p_7	0	0	0	−0.014987

消失矩为何有用？简言之，它是许多小波应用——例如压缩、去噪、奇异性检测等的一个关键参数。

为了更好地理解这一点，下面仔细地考察 $N = 2$ 时的情况。根据（6.10）式，$N = 2$ 时，其前两个矩消失 $(k = 0, 1)$。$k = 2$ 的矩是 $-\left(2^{-1}/\sqrt{2\pi}\right)\widetilde{P}_2(-1)$，由前面的讨论可知，$\widetilde{P}_2(-1) = \frac{1+\sqrt{3}}{8} - \frac{1-\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{4}$。这样，对第三个矩 $(k = 2)$，有：

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \psi_2(x)\, dx = -\frac{1}{8}\sqrt{\frac{3}{2\pi}} \tag{6.11}$$

我们想用这些矩来近似光滑函数的小波系数。可以发现，当 j 变大时，这些系数是很小的。若 f 是光滑且二次连续可微的，那么其 j, k 阶小波系数为：

---

① 根据需要，可以有无限精度，表中只是近似到了小数点后 6 位——译者注。

$$b_k^j = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, 2^{j/2}\psi_2(2^j x - k)\, dx$$

$$= \int_0^{3\cdot 2^{-j}} f(x + 2^{-j}k)\, 2^{j/2}\psi_2(2^j x)\, dx$$

若j足够大，则积分区间变小，把 $f(x+2^{-j}k)$ 用其在x处的二阶 Taylor 展开来取代，即$f(x+2^{-j}k) \approx f(2^{-j}k) + xf'(2^{-j}k) + \frac{1}{2}x^2 f''(2^{-j}k)$。于是，得到如下所示的$b_k^j$的近似式：

$$b_k^j \approx \int_0^{3\cdot 2^{-j}} \left(f(2^{-j}k) + xf'(2^{-j}k) + \frac{1}{2}x^2 f''(2^{-j}k)\right) 2^{j/2}\psi_2(2^j x)\, dx \quad (6.12)$$

右边的积分缩减到只做ψ_2的前三个矩的积分。因为前两阶矩消失了（为零），第 3 阶矩如（6.11）式所示，可以计算出其积分来（见习题 3）。最终的结果是，j,k 阶小波系数近似为：

$$b_k^j \approx -\frac{1}{16}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\, 2^{-5j/2} f''(2^{-j}k) \quad (6.13)$$

奇异性检测。作为（6.13）式的一个应用，可在分段光滑的函数中找到一个其导数的间断点。该应用称为奇异性检测，该处理过程可与其他步骤结合起来，用于检测材料中的裂纹。

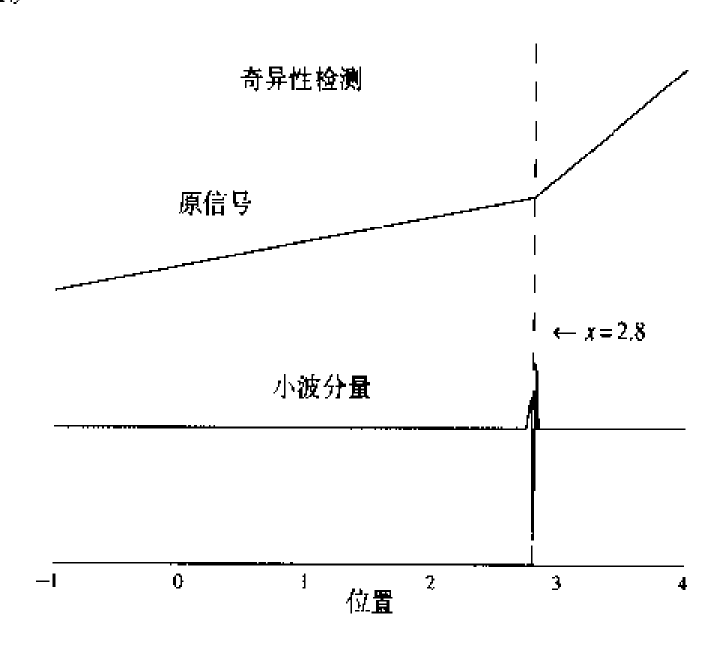


图 6.4　原信号在区间$[-1,4]$上是分段线性的，在$x=2.8$处有一个间断点。用$N=2$的小波对其进行了一级分解，其小波系数中除$x=2.8$附近的小区间外，其余均为 0

作为一个例子，下面要研究图 6.4 所示的分段线性函数的斜率在哪里发生了改

变。注意，若信号 f 是常量、线性的或二次的（因为对本例 f 的二阶 Taylor 展开即 f 本身），则（6.13）式是完全精确的。因为 $f''=0$，这里 f 是线性的，（6.13）式意味着只有斜率改变点附件的小区域，其相应的小波系数才是非零的。原信号表示为：

$$f(x) := \begin{cases} 0.37x + 1.37, & -1 \leqslant x \leqslant 2.8 \\ 1.58x - 2.03, & 2.8 \leqslant x \leqslant 4 \end{cases}$$

对其进行 256 点的等间隔取样，然后用 $N=2$ 的 Daubechies 小波分解。由 $j=8$ 级开始检测，下一级是 $j=7$，有显著不同的小波系数是 $b_{97}^7 \approx -0.01$。其余的小波系数都是 10^{-14} 量级。由于 $k=97$ 时相应的支撑区间为 $[2.79, 2.83]$[①]，于是，奇异性点就位于这个区间。

6.3 计算问题

考虑如下问题。用 $N=2$ 的 Daubechies 小波分解一个有 n 个取样值（即 $s_0, \cdots, s_{n-1}$）的信号。这些样值首先被当做顶级的近似系数 a^j，然后让其通过与 Daubechies 小波相关的高通和低通滤波器。这些滤波器分别称为 H 和 L，相应的冲击响应函数序列分别为 h 和 ℓ：

$$\ell = \frac{1}{2}(\cdots\ 0\quad \underbrace{p_3\quad p_2\quad p_1\quad p_0}_{k=-3\cdots 0}\quad 0\quad 0\ \cdots)\quad \ell_k = \frac{1}{2}\overline{p}_{-k}$$

$$h = \frac{1}{2}(\cdots\ 0\quad 0\quad 0\ \underbrace{-p_0\quad p_1\quad -p_2\quad p_3}_{k=-1\cdots 2}\ \cdots)\quad h_k = \frac{1}{2}(-1)^k p_{k+1}$$

分别用 ℓ 和 h 与 a^j 做卷积，然后下取样。那么对于任何 a^j（不仅是本例中的仅有 8 个样值的信号）有：

$$a_k^{j-1} = D(\ell * a^j)_k = \frac{1}{2}\left(p_0 a_{2k}^j + p_1 a_{2k+1}^j + p_2 a_{2k+2}^j + p_3 a_{2k+3}^j\right) \tag{6.14}$$

$$b_{k+1}^{j-1} = D(h * a^j)_k = \frac{1}{2}\left(p_3 a_{2k}^j - p_2 a_{2k+1}^j + p_1 a_{2k+2}^j - p_0 a_{2k+3}^j\right) \tag{6.15}$$

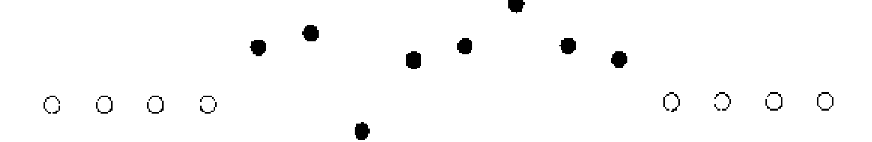
为计算 $j-1$ 级的各个系数，需要4个相邻的样值，并且要从偶数位置开始。例如，若 $n=8$ 即有8个样值点 $s_0, \cdots, s_7$，那么为计算 a_2^2 系数，需要 s_4 至 s_7。为计算 a_3^2，需要 s_6 至 s_9。但实际上并没有 s_9！由此不难理解，在此滤波过程中会很快用尽样值点。更麻烦的是，该计算过程仅在 $k=0, 1, 2$ 时可进行。这意味着，对有 8 个样值点的

① 实际上精确值为[2.789 062 5, 2.828 125]——译者注。

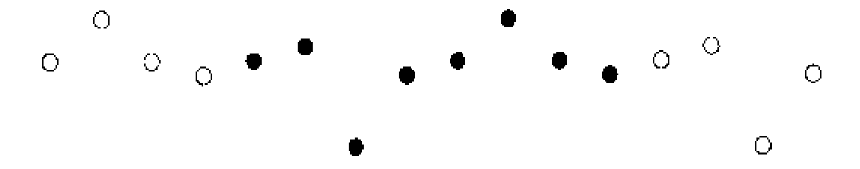
问题来说，仅能得到3个分解系数，而不是原先期望的4个。该现象称为溢出问题。滤波器H和L需要一些原本不存在的样值点才能继续工作。

下面研究如何解决溢出问题。溢出的根本原因是由于不知道信号前后的准确值，所以必须以某种方式对原信号进行扩展。下面是一些常用的方法。在介绍这些方法时所用的图中，实心圆圈表示原信号，空心圆圈表示信号的扩展（延拓）。

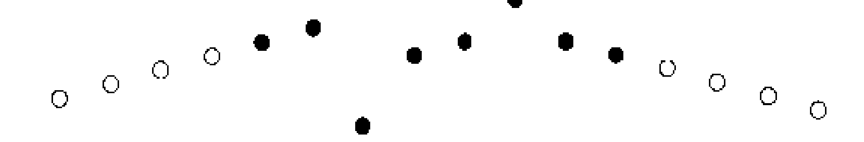
零延拓。在原信号前后两端补零。若原信号非常长，信号的端点则无关紧要。或者原信号确实是有始有终的。具体做法是若$k<0$或$k>n-1$，则$s_k=0$



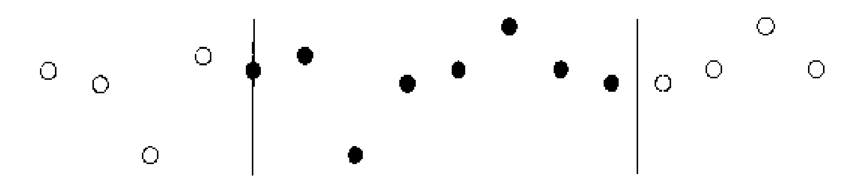
周期延拓。另外一种方法是把原信号看成是周期信号，所以有$s_{k+n}=s_k$。例如，对有8个样值点的信号$s_0,\cdots,s_7$，令$s_8=s_0$，$s_9=s_1$，依此类推。



平滑延拓。在原信号两端用线性外插法补充样值，进行扩展。若原信号信噪比较高，或者至少在端点处如此，则该延拓方法是适宜的。



对称延拓。原信号在端点处进行镜像反射延拓。依据反射线设定的不同有两种方法：一是反射线穿过端点，二是反射线在两个点的中间。第一种方法如下图中左端点的延拓方法所示，第二种方法如右端点的延拓方法所示。



6.4 二进点上的尺度函数

虽然在分解和重构算法中尺度函数ϕ并没有直接进入到算法中，但为了确定ϕ的一些性质（像连续性等），计算出ϕ的近似值还是有价值的。计算ϕ的迭代方法在定

理 5.23 中已经给出。但从具体计算的角度看，该方法还是有些繁琐。计算尺度函数 ϕ 的一个更有效的方法是，在各个二进点 $x = l/2^n$ 上（这里的 l 和 n 为整数），利用尺度恒等式计算 ϕ 的值。下面通过一个具体的计算过程来说明之。为简单起见，考察 $N = 2$ 的 Daubechies 小波，如本章第 6 节所示，它只有 4 个非零的 p 系数，所以计算过程将很简单。

第 1 步。 在各整数点上计算 ϕ。

令 $\phi_l = \phi(l)$，$l \in Z$。$N = 2$ 的 Daubechies 尺度函数仅在区间 $0 < x < 3$ 上非零，于是 $\phi_0 = \phi(0) = 0 = \phi(3) = \phi_3$（见图 6.2）。因为 ϕ_1 和 ϕ_2 是 ϕ 在整数点上仅有的未知的非零值。为了有归一化 $\int \phi = 1$，必须使 $\sum_l \phi_l = 1$，对本例就是：

$$\phi_1 + \phi_2 = 1 \tag{6.16}$$

下面应用尺度恒等式 $\phi(x) = \sum_k p_k \phi(2x - k)$。对于 $x = 1$，该式变成：

$$\phi_1 = \sum_{k=0}^{3} p_k \phi(2 - k) = p_0 \phi_2 + p_1 \phi_1 \qquad （因为 \phi_0 = \phi_3 = 0）$$

$x = 2$ 时，尺度恒等式变成：

$$\phi_2 = \sum_{k \in Z} p_k \phi(4 - k) = p_2 \phi_2 + p_3 \phi_1$$

以上两个等式可写成一个矩阵形式：

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & p_0 \\ p_3 & p_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$$

这里的 p 值是已知的[见（6.5）式]，要求出未知的 ϕ_1 和 ϕ_2。为保证该矩阵等式有非零解，矩阵必须要有一个等于 1 的特征值。（ϕ_1，ϕ_2）即是相应的特征矢量，且有 $\phi_1 + \phi_2 = 1$。为得到该特征矢量，重写该矩阵等式为：

$$\begin{pmatrix} p_1 - 1 & p_0 \\ p_3 & p_2 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

若第一行与第二行成比例关系，则该矩阵等式的非零解存在。由定理 5.9，$\sum p_{奇部} = \sum p_{偶部} = 1$。因此，第一行是第二行的反数。相应于第一行的等式是：

$$(p_1 - 1)\phi_1 + p_0 \phi_2 = 0$$

再次写出归一化等式（6.16）：

$$\phi_1 + \phi_2 = 1$$

联立以上两式，本例（$N=2$的 Daubechies 尺度函数）的解为：

$$\phi_1 = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \approx 1.366 \qquad \phi_2 = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \approx -0.366$$

ϕ在其他各整数点上的值为0。到此，所有整数点上的ϕ值，即$\phi_l = \phi(l)$，$l \in Z$已完全确定下来。

第 2 步。在半整数点上的ϕ值。

为计算$\phi(l/2)$，应用尺度恒等式

$$\phi(x) = \sum_{k\in Z} p_k \phi(2x-k) \tag{6.17}$$

在$x = l/2$处有：

$$\phi(l/2) = \sum_{k=0}^{3} p_k \phi(l-k). \tag{6.18}$$

因为$\phi(l-k)$的值在第1步中已得到，所以$\phi(l/2)$可以由上式计算出来. 因为当$x \leqslant 0$，$x \geqslant 3$时$\phi(x)=0$，所以仅需要计算$l=1, 2, 3, 4, 5$处的$\phi(l/2)$值。当$l=2$或4时，计算的是整数点上的值，其ϕ值已在第1步中得到了。这样就仅需要计算$l=1, 3, 5$处的$\phi(l/2)$值。$l=1, 3, 5$时（6.18）式为：

$$\phi(1/2) = p_0\phi_1 = \frac{(1+\sqrt{3})^2}{8} \approx 0.933 \quad (l=1)$$
$$\phi(3/2) = p_1\phi_2 + p_2\phi_1 = 0 \quad (l=3)$$
$$\phi(5/2) = p_3\phi_2 = \frac{(-1+\sqrt{3})^2}{8} \approx 0.067 \quad (l=5)$$

条件$\sum_l \phi(l) = 1$（由第1步）意味着$\sum_l \phi(l/2) = 2$。下面证明之。其实，由（6.17）式得到：

$$\sum_{l\in Z} \phi(l/2) = \sum_{l\in Z}\sum_{k=0}^{3} p_k \phi(l-k) = \sum_{k=0}^{3} p_k \sum_{l\in Z} \phi(l-k)$$

通过改变求和指标，上式中里面的和式为$\sum_l \phi(l-k) = \sum_l \phi(l)$。该和式等于1（由第1步）。由定理5.9，$\sum_k p_k = 2$，因此，

$$\sum_{l\in Z} \phi(l/2) = 2$$

证毕。

第 3 步。迭代。

ϕ在$l/4$整数点的值，可由ϕ在半整数点的值，在尺度恒等式$\phi(x)=\sum_k p_k\phi(2x-k)$中令$x=l/4$时得到 一般地，一旦得到了$\phi$在$x=l/2^{n-1}$时的值，其在$x=l/2^n$时的值可由尺度恒等式（6.17）得到：

$$\phi(l/2^n)=\sum_{k\in Z}p_k\phi(l/2^{n-1}-k)=\sum_{k\in Z}p_k\phi\left(\frac{l-2^{n-1}k}{2^{n-1}}\right)$$

右边是在上一步中已得到的ϕ在$x=l/2^{n-1}$时的值。

下面将证明

$$\sum_{l\in Z}\phi(l/2^n)=2^n \tag{6.19}$$

前面已知上式对$n=0$（第 1 步）和$n=1$（第 2 步）成立．用归纳法证明，设上式在$n-1$时成立，下面证明上式在n时亦成立。我们有：

$$\begin{aligned}\sum_{l\in Z}\phi(l/2^n)&=\sum_{l\in Z}\sum_{k\in Z}p_k\phi(l/2^{n-1}-k) \quad \text{由（6.17）式}\\&=\sum_{k\in Z}p_k\sum_{l\in Z}\phi(l/2^{n-1}-k) \quad \text{（变换求和顺序）}\\&=\sum_{k\in Z}p_k\sum_{l\in Z}\phi\left(\frac{l-2^{n-1}k}{2^{n-1}}\right)\\&=\sum_{k\in Z}p_k\sum_{l'\in Z}\phi(l'/2^{n-1}) \quad \text{（令 } l'=l-2^{n-1}k\text{）}\end{aligned}$$

由归纳假设，里面的和式为2^{n-1}[（6.19）式，用$n-1$代替n]。因此有：

$$\sum_{l\in Z}\phi(l/2^n)=\sum_{k\in Z}p_k2^{n-1}$$

因为$\sum_k p_k=2$（由定理 5.9），所以上式右边等于2^n，证毕．

随着n的增加，二进点集$\{l/2^n,\ l\in Z\}$变得越来越密集。因为任何实数都是某个二进点的极限，而且由于 Daubechies 尺度函数是连续的，所以ϕ在任何点x上的值均可通过求ϕ在二进点上的极限值来获得。

以这种方式构造的尺度函数ϕ满足归一化条件$\int\phi=1$．为证明此，把$\int\phi\,dx$当做$n\to\infty$时的 Riemann（黎曼）和的极限，该和是按照$\{x_l=l/2^n;\ l=\cdots,-1,0,1,2,\cdots\}$的划分进行的。该划分的宽度为$\Delta x=1/2^n$。于是有：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{l\in Z}\phi(x_l)\,\Delta x=\lim_{n\to\infty}\sum_{l\in Z}\phi(l/2^n)\,(1/2^n)$$

因为$\sum_l\phi(l/2^n)=2^n$，所以右边等于 1，证毕。

6.5 习题

1. 证明 $\widetilde{\phi}(x) := \phi_2(\frac{3}{2}-x)$ 满足 $N=2$ 时的Daubechies尺度关系，但其系数反转后不满足尺度关系，即：

$$\widetilde{\phi}(x) = p_3\widetilde{\phi}(2x) + p_2\widetilde{\phi}(2x-1) + p_1\widetilde{\phi}(2x-2) + p_0\widetilde{\phi}(2x-3)$$

与 $\widetilde{\psi}(x) := \psi_2(\frac{3}{2}-x)$ 相应的恒等式是什么？画出 $\widetilde{\phi}$ 和 $\widetilde{\psi}$ 的图形。

2. 证明（6.9）式成立。
3. 应用 ψ_2 的前三阶矩计算(6.12)式的积分，然后求出(6.13)式中给出的 b_k^j 的近似值。
4. 应用 $N=2$ 的Daubechies小波重做第 4 章的习题 9 和习题 10
5. 用信号

$$g(t) = -52t^4 + 100t^3 - 49t^2 + 2 + N(100(t-1/3)) + N(200(t-2/3))$$

这里

$$N(t) = te^{-t^2}$$

重做习题 4。把本题应用 Daubechies 小波的结果与第 3 章习题 9 的结果进行比较。

6. 令 $f(t)$ 由下式定义：

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t<0, t>1 \\ t(1-t) & 0 \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

对 f 在二进点 $k \times 2^{-8}$, $k = -256, \cdots, 512$ 上取样。$j=7$ 表示顶级时情况（即原始信号）。应用 $N=2$ 的 Daubechies 小波 ψ_2，实现一个一级的分解。画出 7 级时小波系数的幅度图。哪个小波系数最大？与该小波系数相应的 t 是多少？请解释一下。

7. 令 g 由下式定义：

$$g(t) = \begin{cases} 0 & t<0, t>1 \\ t^2(1-t)^2 & 0 \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

对 g 在二进点 $k \times 2^{-8}$, $k = -256, \cdots, 512$ 上取样（$j=7$ 表示顶级）。应用 $N=2$ 时的 Daubechies 小波 ψ_2，实现一个一级的分解。画出 6 级时小波系数的幅度图，哪个小波系数最大？用 $N=3$ 时的 Daubechies 小波 ψ_3 重做以上问题。与该小波系数相应的 t 是多少？请解释一下，为什么最大的小波系数值会出现在那里。

8. （多项式压缩。）信号常常是由一个趋势部分（由一个线性的或者二次的多项式表示）加上一个有界的快速振荡的部分构成的，例如 $f(t) = 2 + 5t + t^2 + \frac{1}{50}$

$\sin(64\pi t)\cos(6\pi t)$。设对 f 在$[-1,1]$上进行了 1024 个点的采样，请给出一种利用 Daubechies 小波分析方法，能够区分开以上两部分信号的策略。用 MATLAB 实现之(提示：准确表示二次项的最小的N值是多少？平滑延拓是本题的最佳选择)。

9. (去噪。)小波分析可用于去除信号中的噪声。令$f(t) = \sin(8\pi t)\cos(3\pi t) + n(t)$，这里的$n(t)$是噪声。在仿真实验中，$n(t)$通常是由一随机数发生器产生的，例如 MATLAB 中的 rand。对 f 在$[-2,3]$上进行 1500 个点的采样，用$N = 2, 3, 6$的 Daubechies 小波分别分析之。实验不同的分解级别，哪一个小波最适合本题？

第7章　其他小波主题

本章包含有关小波的更深入一些的专题。由于这些专题较深入，限于篇幅，此处仅能做泛泛介绍，细节请见有关参考文献

7.1　计算复杂度

7.1.1　小波算法

在本节中，我们简要讨论进行小波分解时需要的运算次数（小波分解算法的计算复杂度）

下面以一个具体的例子来讨论，设f是定义于单位区间$0 \leqslant t \leqslant 1$的连续信号，令

$$a_l^n = f(l/2^n) \quad l = 0, \cdots, 2^n - 1$$

是f的一个离散取样　我们希望得到$N = 2^n$时乘法的次数。

如式(5.12)和式(5.17)所示，分解算法通过下式来计算a^{j-1}和b^{j-1}，$j = n, \cdots, 1$：

$$a_l^{j-1} = (1/2)\sum_k \bar{p}_{k-2l} a_k^j$$

$$b_l^{j-1} = (1/2)\sum_k (-1)^k p_{1-k+2l} a_k^j$$

注意系数a^{j-1}的数量只有系数a^j的数量的一半，所以式中指标l是从0到$2^{j-1} - 1$。令L为p_k中非零值的数目。对于Haar小波，$L = 2$，对由前章中构造的Daubechies小波，$L = 4$。这样，在$j - 1$级（a_l^{j-1}）有2^{j-1}个系数要计算，其中每个需要做$L + 1$次乘法（包括乘以1/2）。对于b_l^{j-1}需要相同的计算量。因为j的范围是从n至1，对分解所需的全部乘法计算量是：

$$\begin{aligned}
2(L+1)2^{n-1} + \cdots + 2(L+1)2^0 &= 2(L+1)\sum_{j=0}^{n-1} 2^j \\
&= 2(L+1)(2^n - 1) \quad \text{使用式（1.23）} \\
&\approx 2(L+1)N
\end{aligned}$$

简言之，小波分解算法的计算量是$O(N)$次乘法运算，N是指最顶级的数据个数。这里的$O(N)$代表一个与N成正比的数字。对上式来说就是$2(L+1)$（Haar 小波时为 6，Daubechies 小波时为 10）。

做个比较，快速傅里叶变换的乘法运算次数是$O(N\log N)$，见 3.1.3 节。然而，此比较有失公平，因为快速傅里叶变换把一个信号分解到 0 至$N/2$区间内的所有频率分量，而小波分解算法只是把一个信号分解到以 2 的n次幂界定的区间内的各频率分量。例如，

$$w_{j-1}(x)=\sum b_l^{j-1}\psi(2^{j-1}x-l)$$

是基于定理 5.11 对f的分解得到的。这可看做在 2^{j-1}至 2^j 区间内f的各个频率分量。因此，小波分解不像离散傅里叶变换那样，一次就把信号分解到非常宽广的频率范围内。

7.1.2　小波包

利用小波包可把信号分解成精细的频率分量。这里只是简单地叙述该技术，其运算量为$O(N\log N)$，因此其计算效率不会高于离散傅里叶变换。对小波包更完整的讨论可见参考文献[13]的第 7 章。

下面以$n=3$时，举例说明。由定理 5.11，信号$f_3\in V_3$可分解为：

$$f_3=w_2+w_1+w_0+f_0\in W_2\oplus W_1\oplus W_0\oplus V_0$$

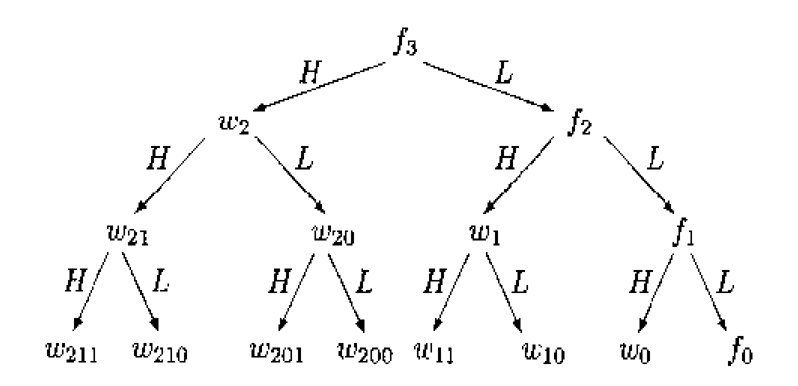
可把该分解写成一个级联的形式：

$$\begin{array}{ccccccc} f_3 & \xrightarrow{L} & f_2 & \xrightarrow{L} & f_1 & \xrightarrow{L} & f_0 \\ & \searrow^{H} & & \searrow^{H} & & \searrow^{H} & \\ & & w_2 & & w_1 & & w_0 \end{array}$$

标示H的箭头表示小波分量上的投影算子。标示L的箭头代表至下一级的投影（例如，由V_2至V_1的投影）。H表示“高通滤波器”，因为某级小波就代表了其相应的高频部分（例如，$V_2=W_1\oplus V_1$中的W_1部分表示了相对V_1部分的高频成分）。类似地，L代表“低通滤波器”，因为它把信号投影至下一级。

信号f_3包含 1 至 8 的频率分量。w_2包含 5 至 8 的频率分量。相应地，w_1、w_0和f_0分别包含 3 至 4、2 和 1 的频率分量。小波包的基本原理是对w_2、w_1和w_0都实施高通和低通滤波。对w_2实施高通和低通滤波分别产生了新的分量w_{21}和w_{20}，它们彼此正交。该过程一直迭代下去直至获得所有频率分量。

对信号f_3，它的完全分解如下图所示。



为了计算运算量，把上图想像成可以分解到n级（图上所示是$n=3$）。第k级每个单元的运算量是$O(2^{N-k})$。因为第k级有2^k个单元，该级总共运算量是$O(2^n)$（与k无关）。因为有n级(不包含第1级，因为它只是原信号)，所以总的运算量是$O(n2^n)$或$N\log_2 N$，这里$N=2^n$。这与快速傅里叶变换的运算量相同。

7.2 高维小波

用小波进行图像处理时，需要把小波扩展到多维（对静态图像需要两维）。高维小波是通过一维小波的张量积获得的。下面以二维时的情况为例，简单解释一下这个概念。用坐标(x,y)表示R^2中的元素。

设ϕ和ψ分别是多分辨率分析（例如，对Haar小波和Daubechies小波时）的尺度函数和小波函数。如前几节所示，函数

$$\phi_{jl}(x)=2^{j/2}\phi(2^jx-l) \qquad \psi_{jl}(x)=2^{j/2}\psi(2^jx-l)$$

分别为空间V_j和W_j的标准正交基。而且，ψ_{jl}与ϕ_{jl}彼此正交。对每个指标集j、l、j'、l'定义函数

$$\phi_{j,l,j',l'}(x,y)=\phi_{jl}(x)\phi_{j'l'}(y) \quad 和 \quad \psi_{j,l,j',l'}(x,y)=\psi_{jl}(x)\psi_{j'l'}(y) \quad (7.1)$$

指标j和j'在0至n（最顶级）之间。指标l和l'相应于平移部分，取决于感兴趣的区域。例如，如果信号定义于单位正方形$\{(x,y);\ 0\leqslant x,y\leqslant 1\}$，那么$0\leqslant l\leqslant 2^j-1$和$0\leqslant l'\leqslant 2^{j'}-1$.经过简单的演算可知，对每个指标对$j$和$j'$，函数集$\{\phi_{j,l,j',l'}(x,y);\ l,l'\in Z\}$和$\{\psi_{j,l,j',l'}(x,y);\ l,l'\in Z\}$分别是空间$V_j\otimes V_{j'}$和$W_j\otimes W_{j'}\subset L^2(R^2)$的正交基。这里$V_j\otimes V_{j'}$称为$V_j$与$V_{j'}$的张量积，而且是由$f(x)g(y)$产生的空间，这里$f\in V_j$，$g\in V_{j'}$。

信号$f\in L^2(R^2)$可在二维空间离散化。例如，信号的定义域是单位正方形$\{(x,y)\in R^2;0\leqslant x,y\leqslant 1\}$，那么可进行如下的离散化：

$$f_{n,n}(x,y)=\sum_{k,k'}a_{k,k'}^{n,n}\phi(2^nx-k)\phi(2^ny-k') \quad \text{where } a_{k,k'}^{n,n}=f(k/2^n,k'/2^n)$$

分解与重构算法通过每个分离的变量接合到一起。虽然完整的算法冗长乏味，但其基本思路还是容易说明的。式（5.10）把函数$\phi(2^nx-k)$分解为$\psi(2^{n-1}x-l)$和$\psi(2^{n-1}x-l)$的线性组合，把$\phi(2^ny-k')$分解为$\phi(2^{n-1}y-l)$和$\psi(2^{n-1}x-l)$的线性组合。信号$f_{n,n}$成为：

$$f_{n,n}=w_{n-1,n-1}+fab_{n-1,n-1}+fba_{n-1,n-1}+faa_{n-1,n-1}$$

这里

$$\left.\begin{array}{c} w_{n-1,n-1} \\ fab_{n-1,n-1} \\ fba_{n-1,n-1} \\ faa_{n-1,n-1} \end{array}\right. \text{是} \begin{array}{l} \psi(2^{n-1}x-l)\psi(2^{n-1}y-l')\text{的线性组合} \\ \phi(2^{n-1}x-l)\psi(2^{n-1}y-l')\text{的线性组合} \\ \psi(2^{n-1}x-l)\phi(2^{n-1}y-l')\text{的线性组合} \\ \phi(2^{n-1}x-l)\phi(2^{n-1}y-l')\text{的线性组合} \end{array}$$

项fab、fba和faa可进一步分解，直到项$\psi(x-l)$或$\phi^0(x-l)$出现。合并同类项后，

$$f_{n,n}=\sum_{j,k=-1}^{n-1}w_{j,k}$$

这里$w_{j,k}\in W_j\otimes W_k$，$0\leqslant j,k\leqslant n-1$，$w_{j,-1}\in W_j\otimes V_0$，$w_{-1,j}\in V_0\otimes W_j$。

信号分解完后，可以像一维时的情形进行滤波和压缩。重构是通过结合各变量的重构算法实现的。下式

$$\phi(x)=\sum_k p_k\phi(2x-k)$$

$$\psi(x)=\sum_k(-1)^k\overline{p}_{1-k}\phi(2x-k)$$

和对应y变量的相应公式，根据$\phi(2x-k)\phi(2y-k')\in V_1\otimes V_1$来表示$w_{-1,-1}$和$w_{0,0}$。在上式中用$2^jx$取代$x$（用$2^{j'}y$取代$y$），则可用$V_{j+1}\otimes V_{j'+1}$中的元素表示$W_j\otimes W_{j'}$中的元素。该过程可一直持续下去，直到把信号表示成如下形式

$$f_{n,n}(x,y)=\sum_{k,k'}a_{k,k'}^{n,n}\phi(2^nx-k)\phi(2^ny-k')$$

为适应滤波和压缩的需要，在这里已对$a_{k,k'}^{n,n}$进行了修正，它代表信号在$x=k/2^n$，$y=k'/2^n$，$0\leqslant k,k'\leqslant 2^n-1$处经过滤波和压缩后的值。

7.3 相应的分解和重构

本节分析分解和重构算法，我们将看到后者包括前者的 l^2伴随算子。如前所述，ϕ 和 ψ 分别是相应于某个多分辨率分析的尺度和小波函数。用正交基 $\phi_{jk}(x) = 2^{j/2}\phi(2^j x - k) \in V_j$ 和$\psi_{jk}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k) \in W_j$ 重新写出分解和重构算法。

分解算法（5.9）如下：

定理 7.1（分解） 函数 $f = \sum_l a_l^n \phi_{nl}(x)$可分解为

$$f = w_{n-1} + w_{n-2} + \cdots + w_0 + f_0$$

$$w_{j-1}(x) = \sum_l b_l^{j-1}\psi_{j-1,l}(x)$$

其中，

$$a_l^{j-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_k \overline{p_{k-2l}}\, a_k^j$$

$$b_l^{j-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_k (-1)^k p_{1-k+2l}\, a_k^j$$

由卷积和下取样算子 D，有：

$$a^{j-1} = D(P * a^j) \quad 其中 \quad P_k = \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{p}_{-k}$$

$$b^{j-1} = D(Q * a^j) \quad 其中 \quad Q_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1)^k p_{1+k}$$

重构算法（5.11）如下。

定理 7.2（重构） 设

$$f_{j-1}(x) = \sum_l a_l^{j-1}\phi_{j-1,l}(x) \qquad w_{j-1}(x) = \sum_l b_l^{j-1}\psi_{j-1,l}(x)$$

令

$$f_j(x) = f_{j-1}(x) + w_{j-1}(x) = \sum_l a_l^j \phi_{jl}(x)$$

那么系数 a_l^j 可由序列 a^{j-1} 和 b^{j-1} 得到：

$$a_l^j = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_k a_k^{j-1} p_{l-2k} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_k b_k^{j-1}\overline{p}_{1+2k-l}(-1)^l$$

由卷积和上取样算子 U，有：

$$a^j = P^* * (Ua^{j-1}) + Q^* * (Ub^{j-1})$$

这里 $P_k^* = \frac{1}{\sqrt{2}}p_k$，$Q_k^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{p}_{1-k}(-1)^k$。

除因子 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 外，其他都是由正交基 ϕ_{jl} 和 ψ_{jl} 得到的。以上两定理与（5.12）式和（5.13）式[或（5.17）和（5.22）]中的算法是等同的。

因为 l^2 是所有形如 $x=(x_j)$; $j \in Z$，$\sum_j |x_j|^2 < \infty$ 的序列构成的空间，实际应用中，仅有有限个非零的 x_j，所以条件 $\sum_j |x_j|^2 < \infty$ 自动满足。分解算法中的关键步骤是下取样算子 $D: l^2 \mapsto l^2$ 和算子 $T_P: l^2 \mapsto l^2$ 以及 $T_Q: l^2 \mapsto l^2$：

$$T_P(x) = P * x \quad x \in l^2$$
$$T_Q(x) = Q * x \quad x \in l^2$$

这里 P 和 Q 是定理 7.1 中定义的序列。类似地，重构算法中的关键步骤是上取样算子 U 和算子 $T_{P^*}: l^2 \mapsto l^2$ 以及 $T_{Q^*}: l^2 \mapsto l^2$：

$$T_{P^*}(x) = P^* * x \quad x \in l^2$$
$$T_{Q^*}(x) = Q^* * x \quad x \in l^2$$

这里 P^* 和 Q^* 是定理 7.2 中定义的序列

下面就是要证明 T_P 与 T_{P^*} 互为伴随算子，T_Q 与 T_{Q^*} 互为伴随算子。如前所述，若 $T: V \mapsto V$ 是内积空间 V 上的线性算子，则其伴随算子 T^* 由下式给出：

$$\langle Tv, w\rangle = \langle v, T^*w\rangle$$

引理 7.3

（1）T_P 的伴随算子是 T_{P^*}。

（2）T_Q 的伴随算子是 T_{Q^*}。

（3）D（上取样算子）的伴随算子是 U（上取样算子）。

证明　前两个性质可由定理 3.14 得到，即与序列 f_n 的卷积相关的算子的伴随算子就是与序列 $f_n^* = \overline{f}_{-n}$ 相关的卷积算子。这样，第 1 个性质可由 $P_k^* = \frac{1}{\sqrt{2}}p_k = \overline{P}_{-k}$ 得到。类似地，因为 $Q_k^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{p}_{1-k}(-1)^k = \overline{Q}_{-k}$，所以由定理 3.14 得到第 2 个性质。

对于第3个性质，令x和y是l^2中的序列。根据D的定义，有：

$$\langle Dx, y\rangle_{l^2} = \sum_n (Dx)_n \overline{y}_n = \sum_n x_{2n}\overline{y}_n$$

另一方面，Uy中只有偶数项非零，且$(Uy)_{2n} = y_n$（由定义）. 因此，

$$\langle x, Uy\rangle = \sum_n x_{2n}\overline{(Uy)}_{2n} = \sum_n x_{2n}\overline{y}_n$$

比较以上两式，得到$\langle Dx, y\rangle = \langle x, Uy\rangle$，证毕。

由引理 7.3 和定理 7.1、定理 7.2 可知，从本质上说，分解和重构算法是互为伴随的。

定理 7.4（分解） 令

$$P_k = \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{p}_{-k} \quad 和 \quad Q_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1)^k p_{1+k}$$
$$T_0 = D\circ T_P \quad 和 \quad T_1 = D\circ T_Q$$

这里D是下取样算子，T_P是序列P的卷积算子（相应地有T_Q是序列Q的卷积算子）。函数$f_j = \sum_l a_l^j \phi_{jl}(x)$可分解为：

$$f = w_{j-1} + f_{j-1}$$

$$w_{j-1}(x) = \sum_l b_l^{j-1}\psi_{j-1,l}(x) \quad 和 \quad f_{j-1} = \sum_l a_l^{j-1}\phi_{j-1,l}(x)$$

这里，

$$a^{j-1} = T_0(a^j) \quad 和 \quad b^{j-1} = T_1(a^j) \tag{7.2}$$

逆过程为，序列a^j可由a^{j-1}和b^{j-1}重构：

$$a^j = T_0^*(a^{j-1}) + T_1^*(b^{j-1}) \tag{7.3}$$

证明 由定理 7.1 得到分解公式。对重构公式，定理 7.2 认为：

$$\begin{aligned}
a^j &= (T_{P^*}\circ U)(a^{j-1}) + (T_{Q^*}\circ U)(b^{j-1}) \\
&= (T_P^*\circ D^*)(a^{j-1}) + (T_Q^*\circ D^*)(b^{j-1}) \quad （用引理 7.3） \\
&= (D\circ T_P)^*(a^{j-1}) + (D\circ T_Q)^*(b^{j-1}) \quad （用定理 0.32） \\
&= T_0^*(a^{j-1}) + T_1^*(b^{j-1})
\end{aligned}$$

（7.2）式、（7.3）式结合起来为：

$$a^j = (T_0^* \circ T_0 + T_1^* \circ T_1)(a^j)$$

这从另一个方面表示出，重构是分解的伴随，而且重构可转化为分解过程[注意，算子（$T_0^* \circ T_0 + T_1^* \circ T_1$）把$a^j$转化为其自身]。具有该性质的算子有一个特别称谓。

定义 7.5 一对滤波器，T_P和T_Q（即分别对序列P和D的卷积算子），称为正交镜像滤波器，如果相应的映射$T_0 = D \circ T_P$，$T_1 = D \circ T_Q$对任意序列$x = (\cdots, x_{-1}, x_0, x_1, \cdots) \in l^2$满足下式：

$$(T_0^* \circ T_0)(x) + (T_1^* \circ T_1)(x) = x \tag{7.4}$$

这里，$x = (\cdots, x_{-1}, x_0, x_1, \cdots) \in l^2(Z)$。

与（7.4）式等价的是：

$$\|T_0 x\|^2 + \|T_1 x\|^2 = \|x\|^2$$

若（7.4）式成立，则

$$\begin{aligned}\|x\|^2 &= \langle x, x\rangle \quad （由\|\cdot\|的定义）\\ &= \langle (T_0^* \circ T_0 + T_1^* \circ T_1)(x), x\rangle \quad [由（7.4）式]\\ &= \langle T_0 x, T_0 x\rangle + \langle T_1 x, T_1 x\rangle \quad 由伴随定义\\ &= \|T_0 x\|^2 + \|T_1 x\|^2\end{aligned}$$

信号$x = (\cdots, x_{-1}, x_0, x_1, \cdots)$（即$\sum_n x_n^2$）的$l^2$范数是与信号能量成正比的。所以对（7.4）式的物理解释是，正交镜像滤波器保持信号能量不变。

7.3.1 传递函数解释

本节的目的是从正交镜像滤波器的定义中，得到滤波器T_P和T_Q应具备的条件：

$$(T_0^* \circ T_0)(x) + (T_1^* \circ T_1)(x) = x \tag{7.5}$$

首先，再次给出第 3 章中有关转移函数的定义（紧接在定理 3.13 后面）。序列$x = (\cdots, x_{-1}, x_0, x_1, \cdots) \in l^2(Z)$的离散傅里叶变换$\widehat{x}$，是定义于$-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$的函数：

$$\widehat{x}(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-in\theta}$$

若T_P是相应于序列P_n的卷积算子，即$(T_P x)_n - \sum_k P_{n-k} x_k$，那么$T_P$的转移函数是定义于$-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$的函数$\widehat{T_P}$：

$$\widehat{T_P}(\theta) = \sum_n P_n e^{-in\theta}$$

如定理 3.13 所述，

$$\widehat{T_P(x)}(\theta) = \widehat{T_P}(\theta)\widehat{x}(\theta) \tag{7.6}$$

另外一个将用到的重要性质是卷积算子的转置的传递函数，即

$$\widehat{F^*}(\theta) = \overline{\widehat{F}}(\theta) \tag{7.7}$$

这在定理 3.14 中已描述。

为达到本节开始时提出的目的，对(7.5)式两端取离散傅里叶变换。以下的$\mathcal{F}(x)(\theta) = \widehat{x}(\theta)$表示$x$的离散傅里叶变换。首先应用于(7.5)式左边的项$(T_0^* \circ T_0)(x)$：

$$\mathcal{F}((T_0^* \circ T_0)(x))(\theta) = \mathcal{F}(T_P^* \circ D^* \circ D \circ T_P)(x)(\theta) \tag{7.8}$$

$$= \widehat{T_P^*}(\theta) \cdot \mathcal{F}((D^* \circ D \circ T_P)(x))(\theta) \tag{7.9}$$

$$= \overline{\widehat{T_P}(\theta)} \cdot \mathcal{F}((D^* \circ D \circ T_P)(x))(\theta) \tag{7.10}$$

最后两个等式分别应用了(7.6)式和(7.7)式。若y是序列y_n，$n \in Z$。那么由上节可知，$(Dy)_n = y_n$，$n = 2k$是指偶数。所以

$$(D^*Dy)_n = \begin{cases} y_n & n\ \text{为偶数，如}\ n = 2k \\ 0 & n\ \text{为奇数} \end{cases}$$

因此，

$$\widehat{D^*Dy}(\theta) = \sum_k y_{2k}e^{-i2k\theta}$$

可重新写为：

$$\widehat{D^*Dy}(\theta) = \sum_n y_n(e^{-in\theta} + e^{-in(\theta+\pi)})/2$$

（n为奇数的项是不存在的，因为$e^{-in\pi} = -1$）。因此，

$$\widehat{D^*Dy}(\theta) = (\widehat{y}(\theta) + \widehat{y}(\theta+\pi))/2$$

把上式代入$y_n = F_0(x)_n$，得：

$$\mathcal{F}((D^* \circ D \circ T_P)(x))(\theta) = \left(\widehat{T_P(x)}(\theta) + \widehat{T_P(x)}(\theta+\pi)\right)/2$$

$$= \left(\widehat{T_P}(\theta)\widehat{x}(\theta) + \widehat{T_P}(\theta+\pi)\widehat{x}(\theta+\pi)\right)/2$$

把上式代入(7.10)式的后部，得：

$$\mathcal{F}((T_0^* \circ T_0)(x))(\theta) = \overline{\widehat{T_P}(\theta)} \left(\widehat{T_P}(\theta)\widehat{x}(\theta) + \widehat{T_P}(\theta+\pi)\widehat{x}(\theta+\pi) \right)/2$$

类似地，

$$\mathcal{F}((T_1^* \circ T_1)(x))(\theta) = \overline{\widehat{T_Q}(\theta)} \left(\widehat{T_Q}(\theta)\widehat{x}(\theta) + \widehat{T_Q}(\theta+\pi)\widehat{x}(\theta+\pi) \right)/2$$

把以上两式加起来，并令其等于$\widehat{x}(\theta)$[如(7.5)式所要求的那样]，得：

$$\left(\frac{|\widehat{T_P}(\theta)|^2 + |\widehat{T_Q}(\theta)|^2}{2} \right) \widehat{x}(\theta) + \left(\frac{\overline{\widehat{T_P}(\theta)}\widehat{T_P}(\theta+\pi) + \overline{\widehat{T_Q}(\theta)}\widehat{T_Q}(\theta+\pi)}{2} \right) \widehat{x}(\theta+\pi) = \widehat{x}(\theta)$$

令$G(\theta)$等于上式左边项中第 1 个圆括号里的内容，$H(\theta)$为第 2 个圆括号里的内容，从而得到：

$$G(\theta)\widehat{x}(\theta) + H(\theta)\widehat{x}(\theta+\pi) = \widehat{x}(\theta)$$

上式对任意序列x必成立。不妨取一序列x（其$x_0 = 1$，且对非零的n，$x_n = 0$），则$\widehat{x}(\theta) = 1$，此时，

$$G(\theta) + H(\theta) = 1$$

然后再取一序列x（其$x_1 = 1$，且对其他的n，$x_n = 0$），则$\widehat{x}(\theta) = e^{i\theta}$。两边除以$e^{i\theta}$后，得：

$$G(\theta) - H(\theta) = 1$$

以上两式相加，得到$G(\theta) = 1$。以上两式相减，得到$H(\theta) = 0$。恢复G和H原来的内容，得到如下定理。

定理 7.6 滤波器T_P和T_Q构成一正交镜像滤波器，当且仅当

$$|\widehat{T_P}(\theta)|^2 + |\widehat{T_Q}(\theta)|^2 = 2$$

$$\overline{\widehat{T_P}(\theta)}\widehat{T_P}(\theta+\pi) + \overline{\widehat{T_Q}(\theta)}\widehat{T_Q}(\theta+\pi) = 0$$

或者等价于，矩阵

$$\begin{pmatrix} \widehat{T_P}(\theta)/\sqrt{2} & \widehat{T_Q}(\theta)/\sqrt{2} \\ \widehat{T_P}(\theta+\pi)/\sqrt{2} & \widehat{T_Q}(\theta+\pi)/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

为一酉阵

若正交镜像滤波器来自于尺度函数和小波函数，则上述定理中的酉阵（转置）变为：

$$\begin{pmatrix} \overline{p(\theta)} & \overline{p(\theta+\pi)} \\ \overline{q(\theta)} & \overline{q(\theta+\pi)} \end{pmatrix}$$

这里$p(\theta)=P(e^{-i\theta})$，$q(\theta)=Q(e^{-i\theta})$如 5.3.3 节中的定义。这与定理 5.21 后面给出的矩阵完全一样，而且在 5.3.3 节中已证明了该矩阵是酉阵。

7.4 小波变换

在第 2 章有关傅里叶变换的讨论中，研究了傅里叶逆变换。本节讨论小波变换及其逆变换。首先回顾一下傅里叶变换。令f是$L^2(R)$中的函数，其傅里叶变换为：

$$\mathcal{F}(f)(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\lambda t}\,dt$$

傅里叶变换的另一个记号是$\widehat{f}(\lambda)$。函数$g\in L^2(R)$的傅里叶逆变换为：

$$\mathcal{F}^{-1}(g)(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)e^{i\lambda x}\,d\lambda$$

傅里叶逆定理 2.1 讲述的主要内容是，$\mathcal{F}^{-1}$正好是$\mathcal{F}$的逆算子，即

$$f=\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}(f)$$

如第 2 章所述，$\mathcal{F}(f)(\lambda)$粗略地描述了以频率λ振荡的各组成部分。逆公式$f=\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}(f)$，当写为如下形式时：

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\lambda)e^{i\lambda x}\,d\lambda$$

表示f可写做各频率分量的加权和（或积分）。

7.4.1 小波变换的定义

小波变换及其变换公式把一个函数分解成各频率分量的加权和。然而，此时的权值仅包括某一特定的小波而不是指数项$e^{i\lambda x}$。

为引入小波变换，设给定一小波函数$\psi(x)$，满足如下两条要求：

1. $\psi(x)$是连续的且呈现指数衰减[即$\psi(x) \leqslant Me^{-C|x|}$，对某些常量$C$、$M$]
2. ψ的积分为零[即$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\, dx = 0$]。

一个小波函数的例子是$\psi(x) = xe^{-x^2}$，如图 7.1 所示。另一个例子是上一章的 Daubechies 小波。Daubechies 小波仅在有限区域非零，所以第一个要求自动满足（只要把常数M取得足够大）。注意，没有对小波及其平移系的正交性做任何假设，Daubechies 小波的构造方法保证了其平移系的正交性，但前一个例子$\psi(x) = xe^{-x^2}$并不与其平移系正交。

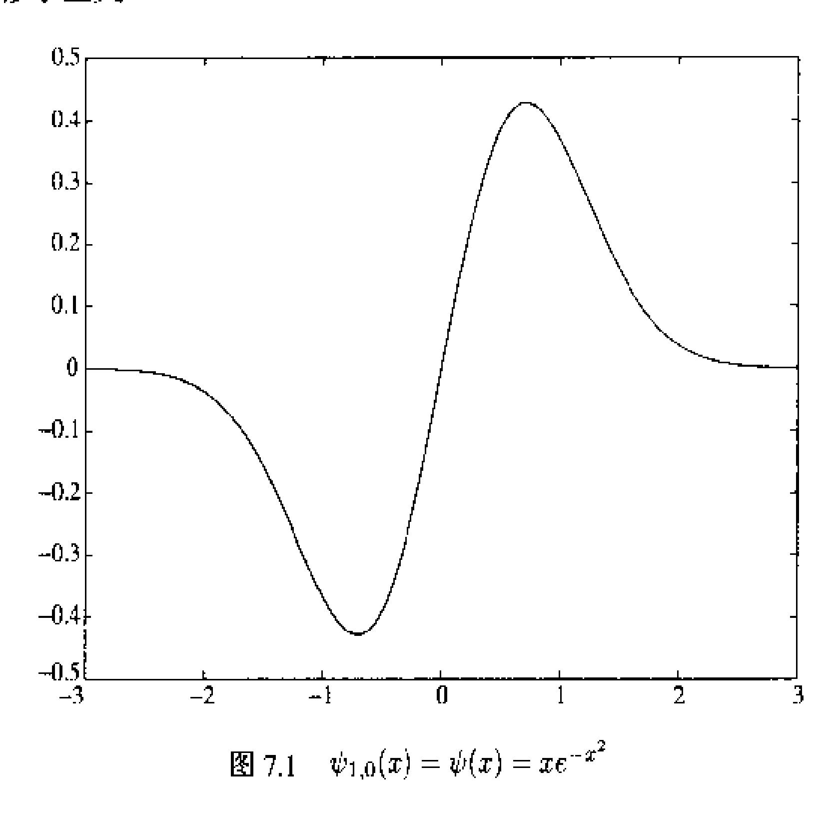


图 7.1　$\psi_{1,0}(x) = \psi(x) = xe^{-x^2}$

在下面的推导过程中，设$\psi(x)$在某一区间$-A \leqslant x \leqslant A$以外等于零，这相对第 1 个条件来讲是一个更严格的要求。因此按此条件推导出的有关小波的每个结论，经过适当修改后，可以成为按照指数衰减条件得到的结论。

下面定义小波变换。

定义 7.7　给定一小波ψ满足上述两条要求，函数$f \in L^2(R)$的小波变换为$W_f : R^2 \mapsto R$，即

$$W_f(a,b) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)}\, dx$$

由此定义可发现，当$a = 0$时表达式无意义。经过变量替换$y = (x-b)/a$，把上述小波变换的定义转换为下面形式：

$$W_f(a,b)=\sqrt{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} f(ya+b))\overline{\psi(y)}\,dy$$

由该表达式可清楚地看到，当$a=0$时，$W_f(a,b)=0$。

随着a的减小，曲线

$$\psi_{a,b}(x)=\frac{1}{\sqrt{|a}}\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

变高、变瘦（请比较图 7.1 和图 7.2），$\psi_{1/2,0}$对应于图 7.2，这里的$\psi(x)=xe^{-x^2}$。因此，$\psi_{a,b}$的频率随a的减小而增加。同时请注意，若ψ的大部分支撑集（即ψ的非零部分）位于原点附近（就像本例所示），那么$\psi_{a,b}$的大部分支撑集将位于$x=b$附近。所以，$W_f(a,b)$反映了在$x=b$附近与$1/a$成比例的频率分量。

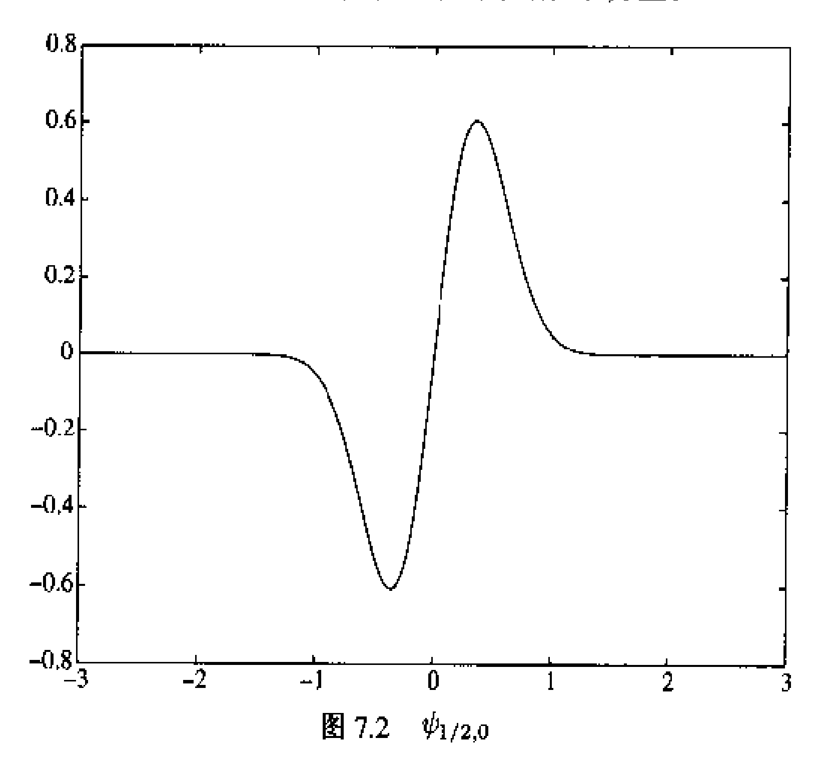


图 7.2 $\psi_{1/2,0}$

7.4.2 小波变换的逆公式

小波变换的逆公式由以下定理给出。

定理 7.8 设ψ为一连续小波，满足下列条件：

（1）ψ按指数衰减到 0（无穷远处）。

（2）$\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)\,dx=0$。

那么对函数$f\in L^2(R)$，有下列逆公式成立：

$$f(x)=\frac{1}{C_\psi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|a|^{-1/2}\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)W_f(a,b)\,\frac{db\,da}{a^2}$$

这里，

$$C_\psi = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\widehat{\psi}(\lambda)|^2}{|\lambda|}\, d\lambda$$

如同傅里叶逆定理，前述的小波逆定理实际上说明了 f 可分解为各频率分量的加权和（或积分），权值为$W_f(a,b)$。但与傅里叶逆定理不同的是，小波逆定理包括两个参量a和b，这是因为小波变换是对f在$x=b$附近的频率成分（参量a）的度量。

在证明定理 7.8 以前，先看看为什么C_ψ是有限的（因为其中的被积函数在$\lambda=0$时为无限大）。首先，把C_ψ的积分区间分割成两部分：第 1 部分是区间$|\lambda| \geqslant 1$，第 2 部分是$|\lambda|<1$。第 1 部分积分中，因为ψ呈现指数衰减，所以$f \in L^2(R)$。因此其傅里叶变换也属于$L^2(R)$，而且

$$\int_{|\lambda|\geqslant 1} \frac{|\widehat{\psi}(\lambda)|^2}{|\lambda|}\, d\lambda \leqslant \int_{|\lambda|\geqslant 1} |\widehat{\psi}(\lambda)|^2\, d\lambda$$

$$< \infty \quad \text{因为} \widehat{\psi} \in L^2(R)$$

第 2 部分积分中，对ψ呈现指数衰减的要求意味着$\widehat{\psi}$是可微的。在$\lambda=0$处对其进行一阶（Taylor）展开，有：

$$\widehat{\psi}(\lambda) = \widehat{\psi}(0) + O(\lambda) \quad \text{（Taylor 定理）}$$

这里$O(\lambda)$代表以$C|\lambda|$（按某个常量C）为界的各项。此外，根据定理中的第（2）个条件，有$\widehat{\psi}(0)=\int \psi(x)\,dx=0$。因此，第 2 部分积分可由下式估计：

$$\int_{|\lambda|<1} \frac{|\widehat{\psi}(\lambda)|^2}{|\lambda|}\, d\lambda \leqslant \int_{|\lambda|<1} \frac{|C\lambda|^2}{|\lambda|}\, d\lambda < \infty$$

因为C_ψ的第 1 部分和第 2 部分积分均是有限的，所以C_ψ也是有限的。

小波变换定理证明　令$F(x)$等于定理中公式的右半部分，即

$$F(x) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) W_f(a,b)\, \frac{db\, da}{a^2}$$

下面就是要证明$F(x)=f(x)$，可分为两个步骤。

第 1 步。首先证明

$$F(x) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{da}{\sqrt{|a|}a^2} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\mathcal{F}_b\left\{\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)\right\}}(y) \mathcal{F}_b\left\{W_f(a,b)\right\}(y)\, dy$$

这里$\mathcal{F}_b\{\cdot\}$表示对括号$\{,\}$里的变量b的表达式实施傅里叶变换。

该步是根据 Plancherel 公式（定理 2.12）得到的，即$\int vu = \int \overline{\mathcal{F}(\overline{v})}\mathcal{F}(u)$　把该定理应用于$F(x)$的对b的积分中，这里令$v(b) = \psi((x-b)/a)$和$u(b) = W_f(a,b)$（把x和a当做常量）。为了应用 Plancherel 定理，要求其中的函数属于$L^2(R)$．若f和ψ有有限支撑，那么$W_f(a,b)$对b的支撑也是有限的（你不妨实际检验一下），所以$W_f(a,b)$和$\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)$是$L^2$中的$b$的函数．

第 2 步．本步是要计算第 1 步积分式中的那两个傅里叶变换．就是要得到

$$\overline{\mathcal{F}_b\left\{\overline{\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)}\right\}(y)} = ae^{iyx}\widehat{\psi}(ay)$$

$$\mathcal{F}_b\left\{W_f(a,b)\right\}(y) = a\sqrt{\frac{2\pi}{|a|}}\,\overline{\widehat{\psi}(ay)}\,\widehat{f}(y)$$

如何得到上式的？请容许稍后分解。先假设已得到上式，然后与第1步中得到的结论综合起来，有：

$$F(x) = \frac{1}{C_\psi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sqrt{2\pi}\,da}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty}|\widehat{\psi}(ay)|^2\widehat{f}(y)e^{iyx}\,dy \tag{7.11}$$

$$= \frac{1}{C_\psi}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{2\pi}\widehat{f}(y)e^{iyx}\,dy\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\widehat{\psi}(ay)|^2}{|a|}\,da \tag{7.12}$$

（7.12）式是通过交换y-和a-的积分次序而得到的。为了对a-计算积分，假设$y \neq 0$，令$u = ay$（于是$du = y\,da$），从而有：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\widehat{\psi}(ay)|^2}{|a|}\,da = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\widehat{\psi}(u)|^2}{|u|}\,du \tag{7.13}$$

$$= \frac{C_\psi}{2\pi} \tag{7.14}$$

若$y = 0$，由条件$\widehat{\psi}(0) = 0$，那么（7.12）式中最右边的积分为 0。因此（7.12）式中最右边的积分，除$y = 0$外，对其他y的积分等于$C_\psi/2\pi$。因为（7.12）式中对y的积分并不受$y = 0$时这一个点的积分值的影响，所以可把（7.14）式代入（7.12）式，从而有：

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{C_\psi}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{2\pi}\widehat{f}(y)e^{iyx}\frac{C_\psi}{2\pi}\,dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(y)e^{iyx}\,dy \\ &= f(x) \end{aligned}$$

这里最后一个式子是由傅里叶逆定理得到的。到此为止，除了第 2 步的详细推导外，定理 7.8 证明完毕。

第 2 步的证明。 第 2 步中的第 1 个等式可由定理 2.6 的性质 6 得到。根据傅里叶变换，有：

$$\mathcal{F}_b\left(\overline{\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)}\right)(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)}e^{-iby}\,db$$

进行变量替换$v=(x-b)/a$，变成：

$$\mathcal{F}_b\left(\overline{\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)}\right)(y) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{\psi(v)}e^{-iy(x-va)}\,dv \tag{7.15}$$

$$= ae^{-iyx}\overline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(v)e^{-iayv}\,dv} \tag{7.16}$$

$$= ae^{-iyx}\overline{\widehat{\psi}(ay)} \tag{7.17}$$

对两边取共轭即得到第 2 步中的第 1 个等式。

为了得到第 2 个等式，由小波变换的定义有：

$$\mathcal{F}_b\{W_f(a,b)\}(y) = \mathcal{F}_b\left\{\frac{1}{\sqrt{|a|}}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)}f(x)\,dx\right\}(y)$$

下一步是要把傅里叶算子放到积分号里。可把积分看做一个特殊的和式，并应用傅里叶变换的线性性质。准确地说就是，用下面的 Riemann 和来近似右边的积分：

$$\mathcal{F}_b\left\{\frac{1}{\sqrt{|a|}}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)}f(x)\,dx\right\}(y)$$
$$\approx \mathcal{F}_b\left\{\frac{1}{\sqrt{|a|}}\sum_j\overline{\psi\left(\frac{x_j-b}{a}\right)}f(x_j)\Delta x\right\}(y)$$

该近似随分割越来越精细（即随$\Delta x\mapsto 0$）从而也越来越精确。傅里叶算子$\mathcal{F}_b$是线性算子，所以可放到和式里面：

$$\mathcal{F}_b\left\{\frac{1}{\sqrt{|a|}}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)}f(x)\,dx\right\}(y)$$
$$\approx \frac{1}{\sqrt{|a|}}\sum_j\mathcal{F}_b\left\{\overline{\psi\left(\frac{x_j-b}{a}\right)}\right\}(y)\,f(x_j)\Delta x$$

令分割趋于无限精细（即$\Delta x \mapsto 0$）、有：

$$\mathcal{F}_b\left\{W_f(a,b)\right\}(y) = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}_b\left\{\overline{\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)}\right\}(y)f(x)\,dx$$

把(7.17)式带入上式、得：

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_b\left\{W_f(a,b)\right\}(y) &= \frac{a}{\sqrt{|a|}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-iyx}\overline{\widehat{\psi}(ay)}f(x)\,dx \\ &= \frac{a}{\sqrt{|a|}}\overline{\widehat{\psi}(ay)}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-iyx}\,dx \\ &= \frac{a\sqrt{2\pi}}{\sqrt{|a|}}\,\overline{\widehat{\psi}(ay)}\,\widehat{f}(y)\end{aligned}$$

到此，第 2 步的第 2 个等式证明完毕，于是第 2 步全部证毕，定理 7.18 也最终证毕。

附录A 技术问题

A.1 傅里叶逆公式的证明

本节给出定理2.1（傅里叶逆公式）的严格证明，即对任意可积函数f，有：

$$f = \mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F}(f)$$

把F和$\mathcal{F}^{-1}$的定义代入上式，就是要证明：

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i(t-x)\lambda} \, dt \, d\lambda$$

把f限定为仅在有限区间非零，从而避免陷入对无限区间收敛性的技术细节的纠缠（详见参考文献[22]）。若f仅在有限区间非零，那么只要在这个有限的区间上对t进行积分即可（无需在整个$-\infty < t < \infty$上）。λ的积分包括无限区间，可先在一个形如$-l \leqslant \lambda \leqslant l$的有限区间上对其处理，然后令$l \to \infty$。如此，就是要证明：

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{l \to \infty} \int_{-l}^{l} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i(t-x)\lambda} \, dt \, d\lambda$$

由复指数的定义（$e^{iu} = \cos u + i \sin u$），上式变为：

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{l \to \infty} \int_{-l}^{l} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left(\cos((t-x)\lambda) - i \sin((t-x)\lambda) \right) \, dt \, d\lambda$$

因为sin函数是奇函数，所以包含$\sin((t-x)\lambda)$的λ的积分等于0。考虑到cos函数是偶函数，那么前面的极限式为：

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{l \to \infty} \int_{0}^{l} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos((t-x)\lambda) \, dt \, d\lambda$$

因为$\int_0^l \cos((t-x)\lambda) \, d\lambda = \frac{\sin((t-x)l)}{t-x}$。用$x+u$代替$t$，则上式等于：

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{l \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+u) \frac{\sin(lu)}{u} \, du \tag{A.1}$$

为了得到该极限，就是要证明，对任给的$\epsilon > 0$，只要l足够大，那么$f(x)$与上

式右边积分项的差值就小于ϵ。对于这个给定的ϵ，选择一$\delta > 0$，使得：

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}|f(x+u)|\,du < \epsilon \qquad (A.2)$$

（从几何上解释，左边的积分是曲线$|f|$在2δ内的面积，通过选取足够小的δ，可使这个小窄条的面积小于ϵ）。该不等式将在本证明的最后用到。

下面应用 Riemann-Lebesgue引理（定理1.21），即

$$\lim_{l\to\infty}\int_a^b g(u)\sin(lu)\,du = 0$$

这里g是一分段连续函数。若g仅在有限区间内非零，则a或b可以是无限的。令$g(u) = f(x+u)/u$，当$l\to\infty$时[函数$g(u) = f(x+u)/u$在下面的两个积分式中都是连续的]，由该引理可知：

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{-\delta} f(x+u)\frac{\sin(lu)}{u}\,du \quad 和 \quad \frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\infty} f(x+u)\frac{\sin(lu)}{u}\,du \to 0$$

那么（A.1）式的极限相当于：

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\lim_{l\to\infty}\int_{-\delta}^{\delta} f(x+u)\frac{\sin(lu)}{u}\,du \qquad (A.3)$$

另一方面，由在傅里叶级数收敛性定理的证明中的第5步[见（1.27）式]可知：

$$\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\frac{\sin((n+1/2)u)}{2\sin(u/2)}\,du = f(x) \quad （n\text{ 为整数}） \qquad (A.4)$$

所以欲证明（A.3）式，只要证明以下两步即可。

第1步。证明当$n\to\infty$，有：

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\frac{\sin((n+1/2)u)}{2\sin(u/2)}\,du - \frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta} f(x+u)\frac{\sin((n+1/2)u)}{u}\,du \to 0$$

有了上式以后，结合（A.4）式，就有：

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta} f(x+u)\frac{\sin((n+1/2)u)}{u}\,du \to f(x), \qquad n\to\infty \qquad (A.5)$$

此即为$l = n+1/2$时的（A.3）式。为了得到l为其他一般形式时的（A.3）式，需要证明下面的第2步。

第2步。对任意的$l>0$可写为$l=n+h$，这里的n是一个整数，而且$0\leqslant h<1$。就是要证明：

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}f(x+u)\left(\frac{\sin((n+1/2)u)}{u}-\frac{\sin(lu)}{u}\right)du\ <\epsilon/2$$

一旦上式得到，那么（A.3）式得证（于是，也就证明了傅里叶逆定理）。对（A.5）式，可选择足够大的N，使得若$n>N$，则

$$|f(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}f(x+u)\frac{\sin((n-1/2)u)}{u}\,du|<\epsilon/2$$

把上面的两个不等式结合起来，得：

$$\begin{aligned}&\left|f(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}f(x+u)\frac{\sin(lu)}{u}\,du\right|\\&\qquad\leqslant\left|f(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}f(x+u)\frac{\sin((n+1/2)u)}{u}\,du\right|\\&\qquad\quad+\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}f(x+u)\left(\frac{\sin((n+1/2)u)}{u}-\frac{\sin(lu)}{u}\right)du\right|\\&\qquad<\epsilon/2+\epsilon/2\quad \text{若}\ n>N\end{aligned}$$

证毕。

第1步的证明 第1步的命题等价于：

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}f(x+u)\sin((n+1/2)u)\left(\frac{1}{2\sin(u/2)}-\frac{1}{u}\right)du\to 0\qquad n\to\infty\quad (\text{A.6})$$

当$n\to\infty$时，由Riemann-Lebesgue引理，因为

$$\int_{-\pi}^{-\delta}\frac{f(x+u)}{2\sin(u/2)}\sin((n+1/2)u)\,du\quad \text{和}\quad \int_{\delta}^{\pi}\frac{f(x+u)}{2\sin(u/2)}\sin((n+1/2)u)\,du\to 0$$

（$\frac{f(x+u)}{2\sin(u/2)}$在区间$-\pi\leqslant u\leqslant-\delta$、$\delta\leqslant u\leqslant\pi$上是连续的）。此外，下式

$$\frac{1}{2\sin(u/2)}-\frac{1}{u}$$

在$-\delta\leqslant u\leqslant\delta$上连续，因为不连续点只可能发生在$u=0$处，但当$u\to 0$时，上式为0（应用L'Hôspital's定理或Taylor展开）。因此，由Riemann-Lebesgue引理得到（A.6）式成立，所以第1步得证。

第 2 步的证明 对任意的$l > 0$，令$l = n + h$，这里n是一个整数而且$0 \leqslant h < 1$。根据均值定理[即$f(x) - f(y) = f'(t)(x-y)$，t位于x和y值之间]，有：

$$\begin{aligned} |\sin((n+1/2)u) - \sin(lu)| &= |\sin((n+1/2)u) - \sin((n+h)u)| \\ &= |\cos(t)|\,|u/2 - hu| \\ &\leqslant |u|/2 \quad \text{因为 } 0 \leqslant h < 1 \end{aligned}$$

因此，

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta} |f(x+u)\left(\frac{\sin((n+1/2)u)}{u} - \frac{\sin(lu)}{u}\right)|\,du$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta} |f(x+u)|\frac{|u|}{2|u|}$$

$$\leqslant \frac{\epsilon}{2} \quad \text{由等式 (A.2)}$$

由此，完成了第 2 步的证明，整个定理也证明完毕。

A.2 定理 5.17 的严格证明

重写定理 5.17 如下：

设ϕ是具有紧支撑的连续函数，满足正交条件，即$\int \phi(x-k)\phi(x-l)\,dx = \delta_{kl}$。令$V_j = \{f = \sum_k a_k \phi(2^j x - k);\ a_k \in R\}$。那么以下内容成立。

1. 空间V_j满足可分条件（即$\cap V_j = \{0\}$）。
2. 若ϕ还满足如下附加条件：
   - 归一化：$\int \phi(x)\,dx = 1$。
   - 尺度：$\phi(x) = \sum_k p_k \phi(2x - k)$，$p_k$为常量，且只有有限个。

那么相应的V_j满足密度条件，即$\cup V_j = L^2(R)$，或者说，L^2中的任意元素可由V_j中的元素近似，这里的j要求足够大。

特别地，若函数ϕ在紧支撑下连续，且满足如上所述的归一化、尺度和正交条件，那么空间集合$\{V_j, j \in Z\}$形成一个多分辨分析。

第 1 部分的证明 注意第 1 步并不需要归一化或者尺度条件。定理的第 1 部分在如下更宽泛的条件下成立。即有一个常量C，使得：

$$\max_{x \in R} |f(x)| \leqslant C\|f\|_{L^2} \qquad f \in V_0 \tag{A.7}$$

根据参考文献[21]，可知为什么这是一个比要求ϕ是紧支撑的更宽泛的条件。若

$f \in V_0$，那么$f(x) = \sum_k a_k \phi(x-k)$，这里的$a_k$是通过取$f(x)$与$\phi(x-k)$的$L^2$内积而得到的[因为$\phi(x-k)$是正交的]。于是有：

$$f(x) = \left(\sum_k \int f(y) \overline{\phi(y-k)} \, dy \right) \phi(x-k) = \int k(x,y) f(y) \, dy$$

这里$k(x,y) = \sum_k \phi(x-k)\overline{\phi(y-k)}$。应用$L^2$上的 Schwarz 不等式（常称为Hölder 不等式），有：

$$|f(x)| \leqslant \left(\int k(x,y)^2 \, dy \right)^{1/2} \|f\|_{L^2} = \left(\sum_k |\phi(x-k)|^2 \right)^{1/2} \|f\|_{L^2}$$

上式右边再次应用了$\phi(y-k)$的正交性。因为ϕ仅在有限区间非零，那么上面和式中的k仅有有限多个，因此必小于某个固定的常量C。那么任何具有紧支撑且其平移正交的ϕ均满足（A.7）式。

设（A.7）式中的不等式成立，下面证明定理的第 1 部分。设f属于V_{-j}。那么$f(2^j x) \in V_0$，应用（A.7）式，有：

$$|f(2^j x)| \leqslant C \left(\int |f(2^j y)|^2 \, dy \right)^{1/2} = C 2^{-j/2} \left(\int |f(t)|^2 \, dt \right)^{1/2}$$

上式右边应用了变量替换$t = 2^j y$。因为上述不等式对所有的x均满足，所以

$$\max_{x \in R} |f(x)| \leqslant C 2^{-j/2} \|f\|_{L^2}$$

若f属于所有的V_{-j}，那么该不等式对所有的j成立。令$j \to \infty$，得到f必处处为零。

第 2 部分的证明　对第 2 部分的证明，考虑正交投影映射$P_j : L^2 \to V_j$。因为$\{\phi_{jk}(x) = 2^{j/2}\phi(2^j x - k)\}$是$V_j$的一个正交基，对任意$f \in L^2$成立，

$$P_j f(x) = \sum_k (f, \phi_{jk}) \phi_{jk}(x) \tag{A.8}$$

$$= 2^j \sum_k \left(\int f(y) \overline{\phi(2^j y - k)} \, dy \right) \phi(2^j x - k) \tag{A.9}$$

我们要证明对每个$f \in L^2$，在L^2上，随$j \to \infty$，$P_j f \to f$。等同于要证明：

$$\|P_j f\| \to \|f\| \tag{A.10}$$

（这里所有的范数均指L^2范数。）上式也可表述为如下形式，因为$f = (f - P_j f) + P_j f$，且$P_j f$与$f - P_j f$正交（根据正交投影的定义），所以有：

$$\|f\|^2 = \|f - P_j f\|^2 + \|P_j f\|^2$$

因此，当且仅当$\|f - P_j f\|^2 \to 0$时，$\|P_j f\|^2 \to \|f\|^2$。

下面分 3 步来证明（A.10）式。

第1步. $\|P_j f\| \to \|f\|$对如下形式的特征函数成立：

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & 若 \quad a \leqslant x \leqslant b \\ 0 & 其他 \end{cases}$$

当然，$a < b$。

再看（A.9）式，

$$P_j\chi(x) = 2^j \sum_k \left(\int_a^b \overline{\phi(2^j y - k)}\, dy \right) \phi(2^j x - k)$$

因此，

$$\begin{aligned} &\|P_j\chi\|^2 \\ &= 2^{2j} \sum_{k,k'} \left(\int_a^b \overline{\phi(2^j y - k)}\, dy \right) \left(\int_a^b \phi(2^j y - k')\, dy \right) \int \phi(2^j x - k) \overline{\phi(2^j x - k')}\, dx \\ &= 2^j \sum_k \left| \int_a^b \phi(2^j y - k)\, dy \right|^2 \end{aligned}$$

最后一个等式应用了$L^2(R)$中$2^{j/2}\phi(2^j x - k)$的正交性。做变量替换$t = 2^j y$有：

$$\|P_j\chi\|^2 = 2^{-j} \sum_k \left| \int_{2^j a}^{2^j b} \phi(t - k)\, dt \right|^2$$

当j变大时，积分区间$2^j a \leqslant t \leqslant 2^j b$变得更大，相比而言，$\phi$的支撑集变小。因此，除了区间两端附近的几个点以外，指标k将分为两类：（1）$\phi(t-k)$的支撑与积分区间$2^j a \leqslant t \leqslant 2^j b$不重叠，此时上式右边的积分为零；（2）$\phi(t-k)$的支撑全部包含于积分区间$2^j a \leqslant t \leqslant 2^j b$，由于规一化条件$\int \phi(y)\, dy = 1$，此时该积分为 1 因此，

$$\begin{aligned} \|P_j\chi\|^2 &\approx 2^{-j}\,(\, 2^j a \text{ 和 } 2^j b \text{ 间的整数}\,) \\ &\approx (b - a) \\ &= \int_a^b 1\, dy \\ &= \|\chi\|^2 \end{aligned}$$

上式近似误差产生的原因，是由$\phi(t-k)$的支撑与积分区间$2^j a \leqslant t \leqslant 2^j b$的端点相重叠的那几个点造成的。当$j$变大时，这些点的数量相对$2^j a$和$2^j b$之间的点数而言是非常少的。因此，随$j \to \infty$，上式的近似程度越来越好，于是第1步得证。

第2步。当$j \to \infty$时，$\|P_j s\| \to \|s\|$，这里s为一阶梯函数，即一个有限的和式：

$$s = \sum_k \alpha_k \chi_k$$

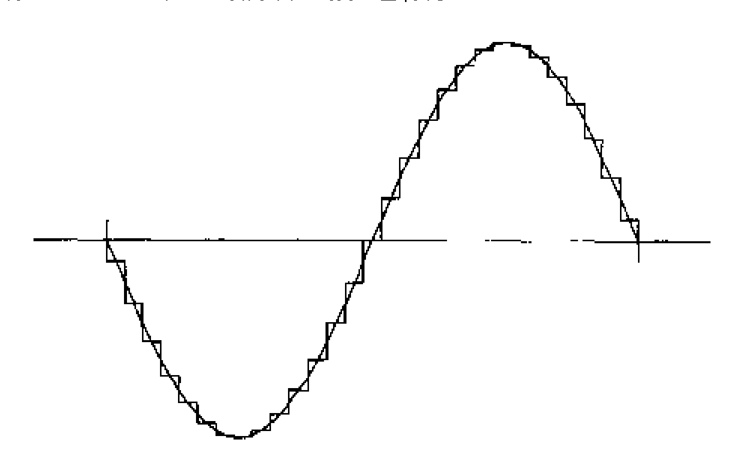
这里的χ_k是在第1步中所讨论的特征函数（图A.1所示的就是一个典型的阶梯函数）。

我们有：

$$\|P_j(s) - s\| = \|\sum_k \alpha_k (P_j(\chi_k) - \chi_k)\| \leqslant \sum_k |\alpha_k| \, \|P_j(\chi_k) - \chi_k\|$$

第1步中已得到，对每个k，当$j \to \infty$时，有$\|P_j(\chi_k) - \chi_k\| \to 0$。因为仅有有限个指标，显然也有$\|P_j s - s\| \to 0$。

第3步。对于任意的$f \in L^2$，有$P_j f \to f$。证明如下：由第2步，因为对任何函数$f \in L^2$可由如图A.1所示的阶梯函数近似。



图A.1 由阶梯函数的近似

对给定的ϵ，选择一阶梯函数s，使得$\|f-s\| < \epsilon/3$。因为正交投影算子不会增加范数值，所以$\|P_j(f-s)\|$小于$\epsilon/3$。由第2步，对于足够大的j，有$\|P_j s - s\| < \epsilon/3$。那么，对于大的$j$，有：

$$\begin{aligned}\|f - P_j(f)\| &= \|(f - s) + (s - P_j s) + (P_j s - P_j f)\| \\ &\leqslant \|f - s\| + \|s - P_j s\| + \|P_j(s - f)\| \\ &< \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3\end{aligned}$$

第3步证毕，于是，定理的第2部分证毕。

A.2.1 定理 5.10 的证明

在定义5.1（第5章）中，定义V_1是由$\phi(2x-j)$，$j\in Z$张成的线性空间，这里的ϕ是一尺度函数，对于有限数目的常量p_k，满足

$$\phi(x)=\sum_l p_l\phi(2x-l) \tag{A.11}$$

相应的小波函数定义为：

$$\psi(x)=\sum_l(-1)^l\overline{p_{1-l}}\phi(2x-l) \tag{A.12}$$

在第 5 章对定理 5.10 的证明中，已经得到ψ的平移与ϕ的平移相互正交 本节的目的是要证明V_1是由ϕ的平移和ψ的平移张成的。这意味着W_0中（V_0在V_1上的正交部分）的任意元素是ψ的平移张成的线性组合。这就是早先对定理5.10的证明中缺失的部分。

对任一j，要证明，存在a_k和b_k，使得：

$$\phi(2x-j)=\sum_k a_k\phi(x-k)+b_k\psi(x-k)$$

因为$\{\phi(x-k),\ k\in Z\}$是正交的，常量a_k若存在，则必满足下式：

$$\begin{aligned}a_k&=\int\phi(2y-j)\overline{\phi(y-k)}\,dy\\&=\int\sum_l\phi(2y-j)\overline{p_l}\overline{\phi(2y-2k-l)}\quad\text{由式（A.11）}\\&=(1/2)\overline{p_{j-2k}}\end{aligned}$$

这里的最后一个等式，再次应用了$\{2^{(1/2)}\phi(2y-j);\ j\in Z\}$在$L^2$上是标准正交的事实。类似地，常量$b_k$若存在，则必有：

$$b_k=2^{-1}(-1)^jp_{1-j+2k}$$

那么，我们就是要证明

$$\phi(2x-j)=2^{-1}\sum_k\overline{p_{j-2k}}\phi(x-k)+(-1)^jp_{1-j+2k}\psi(x-k)$$

应用（A.11）式和（A.12）式，上式等同于：

$$\phi(2x-j)=(1/2)\sum_{k,l}\left((-1)^{j+l}p_{1-j-2k}\overline{p_{1-l}}+\overline{p_{j-2k}}p_l\right)\phi(2x-2k-l).$$

为使上式成立，除$2k+l=j$外，$\phi(2x-2k-l)$的系数一定要等于零。因此，就是要

证明，若$l=j-2k$，则

$$\sum_k p_{1-j+2k}\overline{p_{1-j+2k}}+\overline{p_{j-2k}}p_{j-2k}=2 \tag{A.13}$$

而且，若$l=j-2k+t$，对所有的 $t\neq 0$ ，那么

$$\sum_k (-1)^t p_{1-j+2k}\overline{p_{1-j+2k-t}}+\sum_k \overline{p_{j-2k}}p_{j-2k+t}=0 \tag{A.14}$$

通过令$\gamma=1-j+2k$，然后令$\gamma=j-2k$，(A.13) 式的等号左边可化简为：

$$\sum_\gamma \overline{p_\gamma}p_\gamma$$

根据定理 5.9 可知，上式应等于 2，(A.13) 式得证。

对于 (A.14) 式，要根据t的奇偶性分两种情况讨论。若t是奇数，即$t=2s+1$，那么 (A.14) 式中第 1 部分的和式，经过指标的替换$(k'=s+j-k)$，可变为：

$$\sum_{k'} -p_{j-2k'+t}\overline{p_{j-2k'}}$$

可见其中的第 2 个和式被消掉了。若t是偶数，即 $t=2s$ ，那么经过指标的替换$k=-k'+j+s$ ，只留下第 2 个和式：

$$\sum_{k'} p_{-j+2k'}\overline{p_{-j+2k'-t}}$$

对上式令$\gamma=-j+2k'$，对(A.14)式中的第 1 个和式，令$\gamma=1-j+2k$，于是，(A.14) 式中的两个和式加起来为：

$$\sum_\gamma p_\gamma\overline{p_{\gamma-2s}}$$

根据定理 5.9，上式正好等于零。证毕。

A.2.2　定理 5.23 中收敛部分的证明

本节将证明定理 5.23 中的收敛部分，该部分是用尺度方程

$$\phi(x)=\sum_k p_k\phi(2x-k)$$

来构建尺度函数 ϕ 的。

在该定理中，令ϕ_0等于 Haar 尺度函数。对于$n=1,2,\cdots$，设

$$\phi_n(x)=\sum_k p_k\phi_{n-1}(2x-k)$$

根据5.3.3节傅里叶变换准则所述，上式的傅里叶变换为：

$$\widehat{\phi_n}(\xi)=P(e^{-i\xi/2})\widehat{\phi_{n-1}}(\xi/2)$$

上式迭代$n-1$次后，得：

$$\widehat{\phi_n}(\xi)=\prod_{j=1}^{n-1}P(e^{-i\xi/2^j})\widehat{\phi_0}(\xi/2^n)$$

本节的目的是要证明，通过上述过程按归纳法定义的序列ϕ_n依L^2收敛到一个函数ϕ。下面分两步证明之。首先证明$\widehat{\phi_n}$在R的一紧支撑子集上一致收敛，然后证明ϕ_n依L^2范数收敛。如第5.3.4节所述，任一ϕ_n均满足标准正交条件。若ϕ_n及其平移系是标准正交的，那么ϕ_n的L^2极限及其平移系也是正交的。

对于第1步，需要如下引理：

引理 A.1 若e_j是一函数序列，且$\sum_j|e_j|$在集K上一致收敛，那么无限乘积$\prod_j(1+e_j)$也在集K上一致收敛。

该引理的大概证明过程如下。把该无限乘积写为：

$$\prod_j(1+e_j)=e^{\ln\left(\prod_j(1+e_j)\right)}=e^{\sum_j\ln(1+e_j)}$$

若级数$\sum_j|e_j|$收敛，那么e_j必收敛到0。若$|x|$很小，那么，$|\ln(1+x)|\approx|x|$（因为由L'Hôspital's准则，当$|x|\to 0$时，$|\ln(1+x)|/|x|\to 1$）。因此，$\sum_j|e_j|$在K上的一致收敛等价于$\sum_j|\ln(1+e_j)|$的一致收敛，由此，也就说明了上式$\prod_j(1+e_j)$的一致收敛。

把上述引理应用于$e_j=p(\xi/2^j)-1$，这里的$p(\xi)=P(e^{-i\xi})$和K均是R的一个紧支撑子集。因为p是可微的（p是一多项式），又因为$p(0)=1$，所以有$|p(t)-1|\leqslant C|t|$。这样，$|e_j|\leqslant C|\xi/2^j|$，所以$\sum_j|e_j|$在$R$的每一个紧支撑子集上一致收敛。由引理，

$$\widehat{\phi_n}(\xi)=\prod_{j=1}^{n-1}p(\xi/2^j)\widehat{\phi_0}(\xi/2^n) \tag{A.15}$$

当$n\to\infty$时，上式在R的每一个紧支撑上一致收敛到函数：

$$g(\xi)=\prod_{j=1}^{\infty}p(\xi/2^j)\widehat{\phi_0}(0)$$

现在，$\|\widehat{\phi_0}\|_{L^2}=1$（通过构造），$|p(\xi)|\leqslant 1$（由假设）。因此，对所有的$n$，$\|\widehat{\phi_n}\|_{L^2}\leqslant 1$。由Fatous引理，$\int\lim\limits_{n\to\infty}|\widehat{\phi_n}|^2\leqslant\liminf\limits_{n\to\infty}\int|\widehat{\phi_n}|^2\leqslant 1$，于是$g$属于$L^2$。由定理2.1，

g 等于$\widehat{\varphi}$，这里的ϕ属于L^2。

下面要证明$\phi_n \to \phi \epsilon L^2$，或等价于$\widehat{\phi_n} \to \widehat{\phi} \epsilon L^2$。为此，应用控制收敛定理，即，若函数序列逐点收敛到一极限函数f，并且如果有一可积函数F控制着该序列(即对所有的n，有$|f_n| \leqslant |F|$)，那么$\int f_n \to \int f$。由前述证明可知，$\widehat{\phi_n}$是逐点收敛到$\widehat{\phi}$的（实际上是一致收敛）。所以只要找到一个属于L^2的函数，控制住所有的$\widehat{\phi_n}$即可。

现假设在区间$-\pi/2 \leqslant \xi \leqslant \pi/2$上，$P(e^{-i\xi}) \neq 0$ 因此，在区间$-2^{j-1}\pi \leqslant \xi \leqslant 2^{j-1}\pi$ 上，就有$P(e^{-i\xi/2^j}) \neq 0$，于是在区间$-\pi/2 \leqslant \xi \leqslant \pi/2$上

$$\widehat{\phi}(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} p(\xi/2^j)\widehat{\phi_0}(0) \neq 0 \tag{A.16}$$

因为该函数是连续的，所以其界远离零（即在该紧集上，有$\widehat{\phi} \geqslant c$）。该不等式意味着：

$$|\widehat{\phi}(\xi/2^{n-1}))| = \prod_{j=n}^{\infty} |p(\xi/2^j)\widehat{\phi_0}(0)| \geqslant c, \quad |\xi| \leqslant 2^{n-2}\pi \tag{A.17}$$

应用（A.15）式、（A.16）式和（A.17）式，得：

$$\begin{aligned}|\widehat{\phi_n}(\xi)| &= \frac{\prod_{j=1}^{\infty} |P(e^{-i\xi/2^j})\widehat{\phi_0}(\xi/2^n)|}{\prod_{k=n}^{\infty} |P(e^{-i\xi/2^k})|} \\ &= \frac{|\widehat{\phi}(\xi)|}{|\widehat{\phi}(\xi/2^n)|}|\widehat{\phi}_0(\xi/2^n)| \\ &\leqslant \frac{1}{c}|\widehat{\phi}(\xi)|\,\widehat{\phi}_0(\xi/2^n)\end{aligned}$$

现在，

$$\widehat{\phi_0}(\xi) = \frac{e^{-i\xi-1}}{-\sqrt{2\pi}\,i\xi}$$

如（5.27）式所示 注意当$|\xi| \to \infty$ 时，$|\widehat{\phi_0}(\xi)| \to 0$，以及当$|\xi| \to \infty$时，$\widehat{\phi_0}(\xi)$是有界的（由L'Hôspital's法则）。因此$|\widehat{\phi}_0(\xi)|$是有界函数，所以对某个常量$C$，有：

$$|\widehat{\phi}_n(\xi)| \leqslant C|\widehat{\phi}(\xi)|$$

因为前面已得到$\widehat{\phi}$是L^2中的元素，因此上式右边项可作为控制收敛定理中的对序列$\widehat{\phi_n}$的控制函数。那么，当$n \to \infty$时，有$\widehat{\phi_n} \to \widehat{\phi} \epsilon L^2$和$\phi_n \to \phi \epsilon L^2$。证毕。

附录 B　MATLAB 程序

B.1　通用压缩程序

下述 MATLAB 程序把小于设定阈值（以“百分比”为指标）的项抛弃掉（或称之为“压缩”）。本程序在后面所有的基于 FFT 和小波的压缩方案中都要用到。

```
function wc=compress(w,r)
% Input is the array w and r, which is a number
% strictly between 0 and 1.
% Output is the array wc where smallest 100r% of the
% terms in w are set to zero (e.g r=.75 means the smallest 75% of
% the terms are set to zero
if (r<0) | (r>1)
  error('r should be between 0 and 1')
end;
N=length(w); Nr=floor(N*r);
ww=sort(abs(w));
tol=abs(ww(Nr+1));
wc=(abs(w)>=tol).*w;
```

B.2　应用 MATLAB 的 FFT 函数做滤波和压缩

用 FFT 滤波。 下述的 MATLAB 命令是例 3.6 中所用到的，用于滤除一给定信号的高频成分。其中关键的 MATLAB 函数是 fft 和 ifft，分别计算快速傅里叶变换和其逆变换。

```
>> t=linspace(0,2*pi,2^8); % discretizes [0, 2pi] into 256 nodes
>> y=exp(-(cos(t).^2)).*(sin(2*t)+2*cos(4*t)
     +0.4*sin(t).*sin(50*t));
>> plot(t,y) % generates the graph of the original signal
>> fy=fft(y); % computes fft of y
>> filterfy=[fy(1:6) zeros(1,2^8-12) fy(2^8-5:2^8)]; % sets fft
>>% coefficients to zero for $7 \leq k \leq 256$
>> filtery=ifft(filterfy); % computes inverse fft of the filtered
>>      % fft
>> plot(t, filtery)  % generates the plot of the compressed signal
```

用 FFT 压缩。下述程序称为 fftcomp.m，使用 FFT 和前述的 compress.m 程序压缩一给定的信号。压缩率由输入部分控制。本程序输出原信号曲线、压缩信号曲线以及相对 l^2 误差曲线

```
function error=fftcomp(t,y,r)
% Input is an array y, which represents a digitized signal
% associated with the discrete time array t.
% Also input r which is a decimal
% number between 0 and 1 representing the compression rate
% e.g. 80 percent would be r=0.8.
% Outputs are the graph of y and its compression as well as
% the relative error. This routine uses compress.m
%
if (r<0) | (r>1)
  error('r should be between 0 and 1')
end;
fy=fft(y);
fyc=compress(fy,r);
yc=ifft(fyc);
plot(t,y,t,yc)
error=norm(y-yc,2)/norm(y)
```

例 3.7 中用 fft 压缩时，fftcomp.m 程序的应用示例。

```
>> t=linspace(0,2*pi,2^8);
>> y=exp(-t.^2/10).*(sin(2*t)+2*cos(4*t)+0.4*sin(t).*sin(10*t));
>> fftcomp(t,y,0.8) % uses fftcomp with compression rate of
%                     80 percent
```

B.3 应用 MATLAB 小波工具箱的例子程序

应用小波压缩和滤波的 MATLAB 命令。下述 MATLAB 程序应用小波工具箱来分解信号。程序压缩分解信号然后又重构。该程序使用了两个关键的 MATLAB 命令，wavedec 和 waverec 分别用于分解和重构。本程序可使用不同的小波基。我们这里使用了 Daubechies 的仅 4 个系数的小波（表示为 db2 小波）。也可使用更高级数的 Daubechies 小波（表示为 db$n$，这里的n是从 1 至 50 的整数，$n = 1$ 即 Haar 小波）。程序的输入是信号y，相应的时间标记t，分解层数n 和压缩率r。程序输出原信号曲线、压缩后信号曲线和相对 l^2 误差曲线。

```
function error=daubcomp(t,y,n,r)
```

```
% Input is an array y, which represents a digitized signal
% associated with the vector t; n=the number of levels
% (so the number of nodes is 2^n = length of t and the length
% of y).
% Also input r which is a decimal
% number between 0 and 1 representing the compression rate
% e.g. 80 percent would be r=0.8.
% Output is the graphs of y and its compression, as well as
% the relative error. This routine uses compress.m
% and the Daubechies - 4 wavelets.
%
if (r<0) | (r>1)
  error('r should be between 0 and 1')
end;
[c,l]=wavedec(y,n,'db2');  % Matlab's wave decomposition routine
cc=compress(c,r);          % compress the signal
%                            (compress.m given above)
yc=waverec(cc,l,'db2');    % Matlab's wave reconstruction
%                            routine
plot(t,y,t,yc)             % plot of the signal and compressed
%                            signal
error=norm(y-yc,2)/norm(y) % relative l^2 error
```

图4.14所使用的MATLAB命令。

```
>> t=linspace(0,1,2^8);   % discretizes [0,1] into 256 nodes
>> y=sin(2*pi*t)+cos(4*pi*t)+sin(8*pi*t)
   +4*64*(t-1/3).*exp(-((t-1/3)*64).^2)
   +512*(t-2/3).*exp(-((t-2/3)*128).^2);
>> daubcomp(t,y,8,0.8)
```

例 4.15 的图 4.15 是把上例中的db2小波用db1小波（即 Haar 小波）取代，其他 MATLAB 命令不变。

B.4 5.2 节中算法的 MATLAB 程序

下述的 MATLAB 程序（称为dec）把一个信号作为输入，返回该信号 V_j分量的图像，这里的 j 是由使用者定义的。同时返回 j 级的小波分量。本程序并非商业级代码（小波工具箱提供了商业级的代码），在此只是为了演示一下 5.2 节中所示的分解和重构算法而已。

分解

```
function w=dec(f,p,NJ, Jstop)
%Inputs: f = data whose length is 2^NJ, where NJ=number of scales.
%        p = scaling coefficients
%        Jstop = stopping scale; program will decompose down
%  to scale level Jstop.
%Outputs: w=wavelet coefficients down to level W-Jstop
%         the first 1:2^Jstop entries of w is the V-Jstop
%         projection
%         of f. The rest are the wavelet coefficients.
N=length(f); N1=2^NJ;
if ~(N==N1)
  error('Length of f should be 2^NJ')
end;
if (Jstop <1)|(Jstop>NJ)
  error('Jstop must be at least 1 and <= NJ')
end;
L=length(p);
pf=fliplr(p);
q=p; q(2:2:L) = -q(2:2:L);
a=f;
t=[];
for j=NJ:-1:Jstop+1
n=length(a);
a=[a(mod((-L+1:-1),n)+1) a]; % make the data periodic
b=conv(a,q);  b=b(L+1:2:L+n-1)/2;
a=conv(a,pf);  a=a(L:L+n-1)/2; % convolve
        ab=a(1:L); a=[a(L+1:n) ab];    % periodize
        a=a(2:2:n);                    % then down-sample
t=[b,t];
end;
w=[a,t]; JJ=2^(Jstop);
ww=[w(JJ) w(1:JJ)];      % returns a periodic graph
tt=linspace(0,1,JJ+1);
if L==2  % for Haar, the following plot routine returns
%          a block graph
     ll=length(tt);
    ta=[tt; tt]; tt=ta(1:2*ll);
    wa=[ww; ww]; ww=wa(1:2*ll);
    ww=[ww(2*ll) ww(1:2*ll-1)];
end;
plot(tt,ww)
```

下面是 MATLAB 程序片断，用来产生图5.11，它表示一信号的 V_4 分量。

```
>> t=linspace(0,1,2^8);  % discretize the unit interval into 2^8
%                           nodes
>> y=sin(2*pi*t)+cos(4*pi*t)+sin(8*pi*t)
  +4*64*(t-1/3).*exp(-((t-1/3)*64).^2)
  +512*(t-2/3).*exp(-((t-2/3)*128).^2); % Sample signal
>> p=[0.6830 1.1830 0.3170 -0.1830] % Coefficients for
%                                      Daubechies -4.
>> w=dec(y,p,8,4);  % decomposes the signal y from level 8 down
%                      to level 4
```

重构

下列程序把一信号分解到 j 级（这里的 j 是由使用者定义的），然后完全重构原信号。

```
function y=recon(w,p,NJ, Jstart)
%Inputs: w = wavelet coefficients length is 2^NJ, where
%            NJ=number of scales.
%        ordered by resolution (from lowest to highest).
%        p = scaling coefficients
%        Jstart = starting scale; program will reconstruct
%                 starting with V_Jstart and ending with NJ
%
%Outputs: y=reconstructed signal at V_NJ with a corresponding
%           plot
%
N=length(w); Nj=(2^Jstart);
if ~(N==2^NJ)
  error('Length of w should be 2^NJ')
end;
if (Jstart <1)|(Jstart>NJ)
  error('Jstop must be at least 1 and <= NJ')
end;
L=length(p);
q=fliplr(p);
a=w(1:Nj);
for j=Jstart:(NJ-1)
b=w(Nj+1:2*Nj);
m=mod((0:L/2-1),Nj)+1;
Nj=2*Nj;
ua(2:2:Nj+L)=[a a(1,m)]; % periodize the data and upsample
ub(2:2:Nj+L)=[b b(1,m)]; % periodize the data and upsample
```

```
 ca=conv(ua,p); ca=[ca(Nj:Nj+L-1) ca(L:Nj-1)]; % convolve with p
 cb=conv(ub,q); cb=cb(L:Nj+L-1); % convolve with q
 cb(1:2:Nj)=-cb(1:2:Nj); % sign change on the odd entries
a=ca+cb;
end;
y=a;
yy=[y(N) y]; % periodize the data
t=linspace(0,1,N+1);
if L==2  % in the Haar case, return a block-style graph
     ll=length(t);
    ta=[t; t]; t=ta(1:2*ll);
    ya=[yy; yy]; yy=ya(1:2*ll);
    yy=[yy(2*ll) yy(1:2*ll-1)];
end;
plot(t,yy)
```

下面的 MATLAB 程序片断把信号 f 压缩80%，然后重构之，如第 5 章的图 5.14 所示。

```
>> wc=compress(w,0.8);
>> t=linspace(0,1,2^8);  % discretize the unit interval into 2^8
%                          nodes
>> y=sin(2*pi*t)+cos(4*pi*t)+sin(8*pi*t)
  +4*64*(t-1/3).*exp(-((t-1/3)*64).^2)
  +512*(t-2/3).*exp(-((t-2/3)*128).^2); % Sample signal
>> p=[0.6830 1.18300.3170 -0.1830] % Coefficients for
%                                    Daubechies -4.
>> w=dec(y,p,8,1);  %decomposes the signal y from level 8 down
%                     to level 1
>> wc=compress(w,0.8); %compresses the wavelet coefficients by
%                        80 percent
>> %(compress is the routine given at the beginning of this
%  section)
>> yc=recon(wc,p,8,1); % reconstructs from level 1 to level 8
%                        from the compressed wavelet coefficients wc
```

参考文献

[1] Benedetto, J. J., *Harmonic Analysis and Applications*. CRC Press, Boca Raton, FL, 1997.

[2] Benedetto, J. J. and M. Frazier editors, *Wavelets: Mathematics and Applications*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1993.

[3] Boyce, W. E. and R. C. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, 3rd edition, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1977.

[4] Burrus, S., R. Gopinath, and H. Guo, *Introduction to Wavelets and Wavelet Transforms, A Primer*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1998.

[5] Chui, C., *An Introduction to Wavelets, Volumes 1 and 2*, Academic Press, San Diego, 1992.

[6] Daubechies, I., *Ten Lectures on Wavelets*, SIAM, 1992.

[7] Folland, G. B., *Fourier Analysis and Its Applications*, Wadsworth & Brooks/Cole, Pacific Grove, CA, 1992.

[8] Hanselman, D. and B. Littlefield, *Mastering MATLAB 5: A Comprehensive Tutorial and Reference*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1998.

[9] Hernandez, E. and G. Weiss, *A First Course on Wavelets*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1996.

[10] Mallat, S., "A theory for multi-resolution approximation: the wavelet approximation," *IEEE Trans. PAMI* **11** (1989), 674-693.

[11] Mallat, S., *A Wavelet Tour of Signal Processing*, Academic Press, San Diego, 1998.

[12] Marchuk, G. I., *Methods of Numerical Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin, 1975.

[13] Meyer, Y., *Wavelets & Applications*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 1993.

[14] Papoulis, A., *The Fourier Integral and its Applications*, McGraw-Hill, New York, 1962.

[15] Pratap, R., *Getting started with MATLAB 5*, Oxford University Press, New York, 1999.

[16] Ralston, A. and P. Rabinowitz, *A First Course in Numerical Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1978.

[17] Royden, H., *Real Analysis, 2nd edition*, MacMillan, New York, 1968.

[18] Rudin, W. *Real and Complex Analysis*,.

[19] Stein, E. M. and G. Weiss, *Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1971.

[20] Strang, G. and T. Nguyen, *Wavelets and Filter Banks*, Wellesley-Cambridge Press, Wellesley, MA, 1996.

[21] Strichartz, R. S., "How To Make Wavelets," *Amer. Math. Monthly*, **100** (1993), 539-556.

[22] Tolstov, G. P., *Fourier Series*, Dover, New York, 1962.